20-quantum-due-qubit-06

# Quantum Computing

## Due qubit

1

1

# un registro con due qubit

- un registro con due qubit può trovarsi in $4$ possibili stati di base, rappresentati con $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$
- complessivamente il sistema dei due qubit si trova nello stato $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$ dove $\alpha_{00}$, $\alpha_{01}$, $\alpha_{10}$ e $\alpha_{11}$, sono numeri complessi
  - con il vincolo $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$

2

2

20-quantum-due-qubit-06

## due qubit – misura

- quando i due qubit vengono misurati (osservati) collassano
  - con probabilità $|\alpha_{00}|^2$ nello stato $|00\rangle$
  - con probabilità $|\alpha_{01}|^2$ nello stato $|01\rangle$
  - con probabilità $|\alpha_{10}|^2$ nello stato $|10\rangle$
  - con probabilità $|\alpha_{11}|^2$ nello stato $|11\rangle$
- anche in questo caso i valori di ampiezza sono *irrimediabilmente perduti* dopo l'osservazione

3

3

## due qubit – misura – esempio

- supponiamo che due qubit si trovino nello stato $({}^{1}/_{2} + {}^{i}/_{2})|00\rangle + {}^{1}/_{2}\,|01\rangle + {}^{i}/_{2}\,|10\rangle$
- se misuriamo, con che probabilità otteniamo $|00\rangle$?
  - $P[00] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
  - $P[01] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
  - $P[10] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
  - $P[11] = 0$
  - dove $P[00]$ indica la *probabilità* che il valore di entrambi i qubit sia $0$, ecc…

4

4

20-quantum-due-qubit-06

## due qubit – misura di un solo qubit

- consideriamo due qubit nello stato $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$
- supponiamo di misurare solo il primo qubit, ignorando il secondo, supponiamo che venga $|0\rangle$
  - ciò accade con probabilità $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$
- dopo la misura, se il primo qubit è stato misurato come $|0\rangle$, il sistema si trova nello stato $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle$ che deve però essere normalizzato, diventando $\frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2+|\alpha_{01}|^2}}$

5

5

## due qubit – misura di un solo qubit

- consideriamo due qubit nello stato $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$
- supponiamo di misurare solo il primo qubit, ignorando il secondo, supponiamo che venga $|1\rangle$
  - ciò accade con probabilità $|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2$
- dopo la misura, se il primo qubit è stato misurato come $|1\rangle$ il sistema si trova nello stato $\alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$ che deve però essere normalizzato, diventando $\frac{\alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle}{\sqrt{|\alpha_{10}|^2+|\alpha_{11}|^2}}$

6

6

20-quantum-due-qubit-06

## due qubit assieme – entanglement

- consideriamo ora due qubit indipendenti, il primo nello stato $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, il secondo nello stato $\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$, e *mettiamoli assieme*
- lo stato complessivo si ottiene *moltiplicando* $(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\,\beta_0|10\rangle + \alpha_1\,\beta_1|11\rangle$
  - una notazione formalmente più corretta verrà introdotta in seguito

7

7

## esempio – mettiamo assieme due qubit

- consideriamo ${}^{1}/_{\sqrt{2}}\,|0\rangle + {}^{1}/_{\sqrt{2}}\,|1\rangle$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$
- otteniamo ${}^{\sqrt{3}}/_{2\sqrt{2}}\,|00\rangle - {}^{1}/_{2\sqrt{2}}\,|01\rangle + {}^{\sqrt{3}}/_{2\sqrt{2}}\,|10\rangle - {}^{1}/_{2\sqrt{2}}\,|11\rangle$
- con $\left|{}^{\sqrt{3}}/_{2\sqrt{2}}\right|^2 + \left|{}^{1}/_{2\sqrt{2}}\right|^2 + \left|{}^{\sqrt{3}}/_{2\sqrt{2}}\right|^2 + \left|{}^{1}/_{2\sqrt{2}}\right|^2$
- che è uguale a ${}^{3}/_{8} + {}^{1}/_{8} + {}^{3}/_{8} + {}^{1}/_{8} = 1$

8

8

20-quantum-due-qubit-06

## una domanda importante

- dato lo stato di un sistema di due qubit è possibile stabilire quale sia lo stato di ciascuno di essi?
  - ad esempio fattorizzando lo stato complessivo
- la risposta è, in generale, no

9

9

## una domanda importante

- consideriamo ad es. lo stato (detto *stato di Bell*) ${}^{1}\!/_{\sqrt{2}}\,|00\rangle + {}^{1}\!/_{\sqrt{2}}\,|11\rangle$
- proviamo a scriverlo nella forma $(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\,\beta_0|10\rangle + \alpha_1\,\beta_1|11\rangle$
- abbiamo che $\alpha_0\beta_0 = {}^{1}\!/_{\sqrt{2}}$, quindi $\alpha_0 \neq 0$ e $\beta_0 \neq 0$
- abbiamo che $\alpha_1\beta_1 = {}^{1}\!/_{\sqrt{2}}$, quindi $\alpha_1 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$
- ma deve essere $\alpha_0\beta_1 = \alpha_1\beta_0 = 0$ e ciò non è possibile se nessuno tra $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\beta_0$ e $\beta_1$ può valere $0$

10

10

20-quantum-due-qubit-06

## entaglement

- l'esempio precedente mostra come, in generale, un sistema di due qubit non possa essere descritto attraverso le caratteristiche separate di ciascun qubit
  - quando i due qubit sono assieme, per descriverne lo stato occorre pensarli come un'unica entità
  - sono così *entangled* che non possiamo pensarli come oggetti singoli
  - attenzione: continuano a comportarsi come un tutt'uno anche se li separiamo

11

11

## entanglement – esercizio

- consideriamo lo stato $1/\sqrt{2}\,|01\rangle + 1/\sqrt{2}\,|10\rangle$
- è possibile scriverlo nella forma $(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\,\beta_0|10\rangle + \alpha_1\,\beta_1|11\rangle$?
- abbiamo $\alpha_0\beta_1 = 1/\sqrt{2}$, quindi $\alpha_0 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$
- abbiamo $\alpha_1\beta_0 = 1/\sqrt{2}$, quindi $\alpha_1 \neq 0$ e $\beta_0 \neq 0$
- ma deve essere $\alpha_0\beta_0 = \alpha_1\beta_1 = 0$ e ciò non è possibile se nessuno tra $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\beta_0$ e $\beta_1$ può valere $0$

12

12

20-quantum-due-qubit-06

## entanglement – esercizio

- consideriamo lo stato ${}^{7}/_{10}\,|00\rangle + {}^{1}/_{10}\,|01\rangle + {}^{1}/_{10}\,|10\rangle + {}^{7}/_{10}\,|11\rangle$
- è effettivamente uno stato?
  - $({}^{7}/_{10})^2 + ({}^{1}/_{10})^2 + ({}^{1}/_{10})^2 + ({}^{7}/_{10})^2 = 1$

13

13

## entanglement – esercizio

- consideriamo lo stato ${}^{7}/_{10}\,|00\rangle + {}^{1}/_{10}\,|01\rangle + {}^{1}/_{10}\,|10\rangle + {}^{7}/_{10}\,|11\rangle$
- è possibile scriverlo nella forma $(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\,\beta_0|10\rangle + \alpha_1\,\beta_1|11\rangle$?
- abbiamo $\alpha_0\beta_0 = {}^{7}/_{10}$, $\alpha_0\beta_1 = {}^{1}/_{10}$, $\alpha_1\beta_0 = {}^{1}/_{10}$, $\alpha_1\beta_1 = {}^{7}/_{10}$
- quindi ${}^{\beta_0}/_{\beta_1} = 7$ e ${}^{\beta_0}/_{\beta_1} = {}^{1}/_{7}$, e ciò non è possibile

14

14

20-quantum-due-qubit-06

## separiamo due qubit nello stato di Bell e li misuriamo

- allontaniamo tra loro due qubit nello stato $1/\sqrt{2}\,|00\rangle + 1/\sqrt{2}\,|11\rangle$
- ovunque sia, se misuriamo il primo qubit la probabilità di ottenere $0$ (o $1$) è $1/2$
- nel caso si ottenga $0$ il nuovo stato è $|00\rangle$
- nel caso si ottenga $1$ il nuovo stato è $|11\rangle$

15

15

## separiamo due qubit nello stato di Bell e poi li misuriamo

- la situazione è analoga se misuriamo il secondo qubit: la probabilità di ottenere $0$ (o $1$) è $1/2$
- ma se misuriamo prima il primo qubit e otteniamo $0$ allora se dopo misuriamo il secondo otteniamo $0$ con probabilità $1$!
- tutto ciò accade a qualunque distanza tra i due qubit!

16

16

20-quantum-due-qubit-06

## separiamo due qubit nello stato di Bell e poi li misuriamo

- ma non è che quando i due qubit si incontrano si mettono d'accordo?
  - magari sorteggiano con una moneta 0 o 1
  - e decidono di valere entrambi 0 o entrambi 1
- si può dimostrare che non è così

17

17

## due qubit – rappresentazione vettoriale

- possiamo rappresentare lo stato $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$ con il vettore $\begin{pmatrix}\alpha_{00}\\ \alpha_{01}\\ \alpha_{10}\\ \alpha_{11}\end{pmatrix}$
- quindi $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle = \alpha_{00}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_{01}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_{10}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_{11}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

18

18

20-quantum-due-qubit-06

## due qubit – rappresentazione vettoriale

- quindi $|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $|01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $|10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

  e $|11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

19

19

## uso dei tensori nella notazione

- l'operatore tensore ($\otimes$) consente di semplificare la notazione; in particolare possiamo scrivere $|00\rangle$ come $|0\rangle\otimes|0\rangle$
- infatti $\binom{a}{b}\otimes\binom{c}{d}$ costruisce il vettore $\begin{pmatrix}a\binom{c}{d}\\ b\binom{c}{d}\end{pmatrix}$
- quindi $\binom{1}{0}\otimes\binom{1}{0}$ costruisce il vettore $\begin{pmatrix}1\binom{1}{0}\\ 0\binom{1}{0}\end{pmatrix}$

20

20

20-quantum-due-qubit-06

## uso dei tensori nella notazione

- torneremo in seguito sulla definizione e sull'uso dell'operatore tensore

21

21