50-teletrasporto-03

Quantum Computing

Teletrasporto

1

1

2

2

50-teletrasporto-03

L’isola del giorno prima – Umberto Eco

- problema fondamentale per la navigazione nel ‘600: calcolare con precisione la longitudine (problema del *punto fijo*)
  - "... il cane era stato ferito in Inghilterra e Byrd poneva cura a che esso rimanesse sempre piagato. Qualcuno a Londra, ogni giorno e a un'ora fissa e convenuta, faceva qualcosa all'arma colpevole, o ad un panno imbevuto del sangue della bestia, provocandone la reazione – forse di sollievo, forse di pena anche maggiore..."

3

3

premessa

stato di Bell

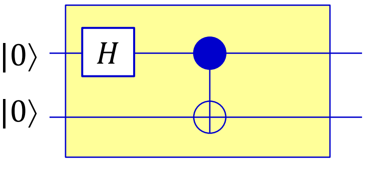
4

4

50-teletrasporto-03

premessa – stato di Bell

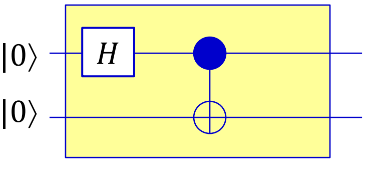
- è possibile ottenere lo stato di Bell per due qubit
- basta applicare a due qubit in $|0\rangle$ il seguente circuito, che applica Hadamard e poi un $CNOT$



5

è possibile ottenere lo stato di Bell $|\Phi^+\rangle$

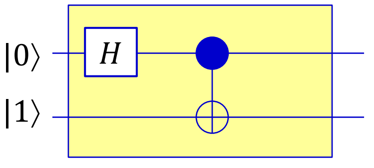
- dopo l'applicazione di Hadamard abbiamo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$
- quindi dal $CNOT$ otteniamo $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = |\Phi^+\rangle$



6

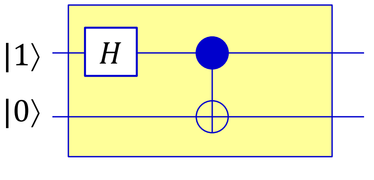
altri stati di Bell – $|\psi^+\rangle$

- in realtà ci sono altri tre stati di Bell
  - li otteniamo dando in input $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$
- dopo l'applicazione di Hadamard a $|01\rangle$ abbiamo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$
- quindi dal $CNOT$ otteniamo $\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle = |\psi^+\rangle$



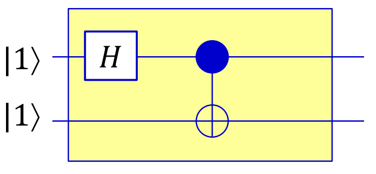
altri stati di Bell – $|\Phi^-\rangle$

- in realtà ci sono altri tre stati di Bell
  - li otteniamo dando in input $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$
- dopo l'applicazione di Hadamard a $|10\rangle$ abbiamo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$
- quindi dal $CNOT$ otteniamo $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = |\Phi^-\rangle$



altri stati di Bell – $|\psi^-\rangle$

- in realtà ci sono altri tre stati di Bell
  - li otteniamo dando in input $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$
- dopo l'applicazione di Hadamard a $|11\rangle$ abbiamo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$
- quindi dal $CNOT$ otteniamo $\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle = |\psi^-\rangle$



9

9

stati di Bell $|\Phi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$, $|\psi^+\rangle$, e $|\psi^-\rangle$

- i quattro stati di Bell sono una base ortonormale dello spazio di due qubit
  - infatti sono il risultato dell'applicazione di una unitary transformation ai quattro stati della base ortonormale $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$

10

10

50-teletrasporto-03

teletrasporto

protocollo per spedire un qubit

Alice vuole inviare un qubit a Bob

- Alice ha un qubit nello stato $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ e vuole inviarlo a Bob
  - ovviamente Alice non può misurare $|\psi\rangle$, altrimenti perde i valori α_0 e α_1
  - e neppure c'è un canale per trasportare quel qubit da Alice a Bob; sono lontani tra loro

50-teletrasporto-03

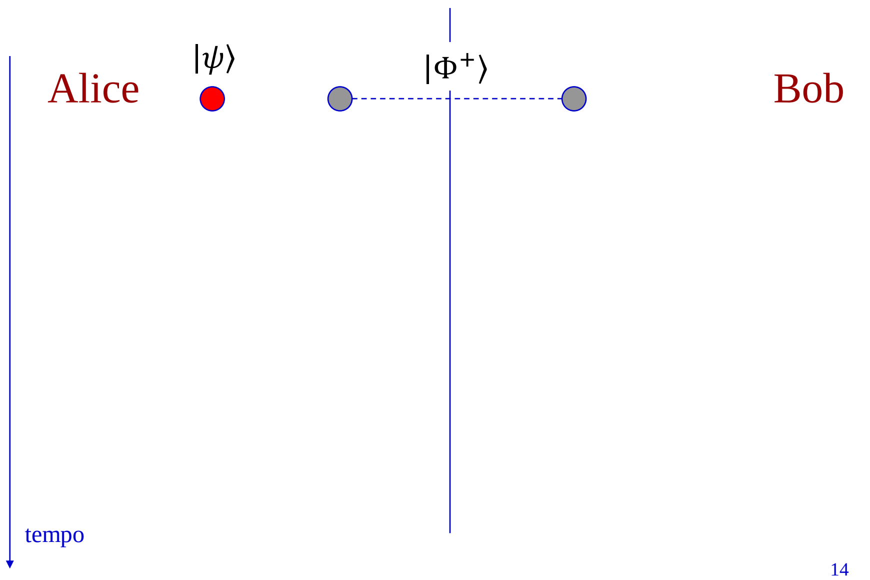
Alice e Bob condividono due qubit

- supponiamo che Alice e Bob condividano una coppia di qubit (Alice ha il primo qubit della coppia e Bob l'altro) nello stato di Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$
  - ricordiamo che lo stato di Bell $|\Phi^+\rangle$ è entangled

13

13

Alice e Bob



14

14

50-teletrasporto-03

un protocollo per il teletrasporto

- Alice esegue degli operatori ed effettua delle misure su $|\psi\rangle$ e sul suo bit di $|\Phi^+\rangle$
  - ne ricava due valori b_1 e b_2 (due bit classici)
- Alice trasmette su un canale classico b_1 e b_2 a Bob
- Bob sceglie, in funzione dei valori di b_1 e b_2, uno di quattro operatori e lo esegue sul suo bit di $|\Phi^+\rangle$
  - il risultato è $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$

15

15

Alice applica un $CNOT$

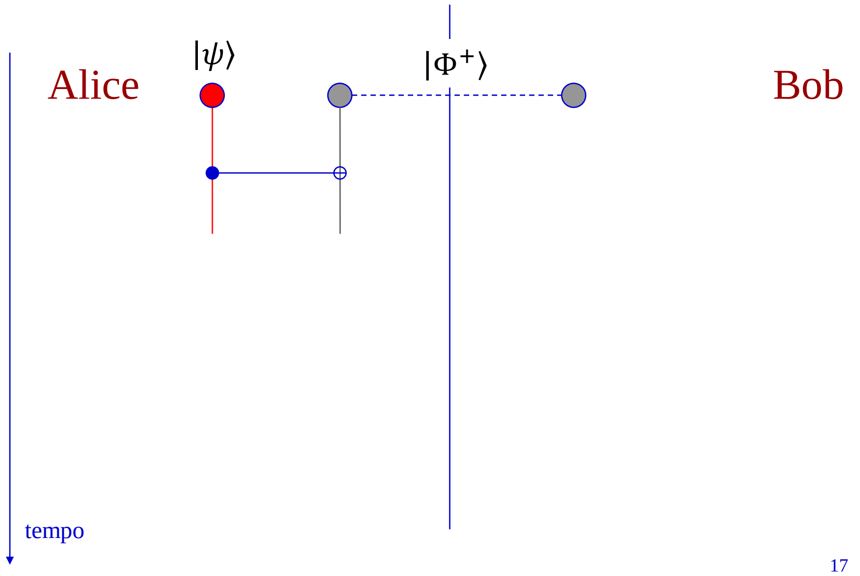
- Alice applica un $CNOT$ al qubit che deve trasmettere $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ (controllo) e al *suo* bit della coppia $|\Phi^+\rangle$ in stato di Bell
- consideriamo l'insieme dei tre qubit prima del $CNOT$; essi sono globalmente nello stato $(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) =$ $\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|111\rangle$
- quando applichiamo il $CNOT$ Alice ottiene $\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|101\rangle$

16

16

50-teletrasporto-03

Alice e Bob



17

17

Alice *misura* il suo qubit in stato di Bell

- quando applichiamo il $CNOT$ Alice ottiene $\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|101\rangle$
- se nella misura Alice ottiene 0 allora i due rimanenti qubit vanno nello stato $\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|11\rangle$; normalizzando, $\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|11\rangle$
- se Alice ottiene 1 allora i due qubit vanno nello stato $\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|10\rangle$; normalizzando, $\alpha_0|01\rangle + \alpha_1|10\rangle$

18

18

50-teletrasporto-03

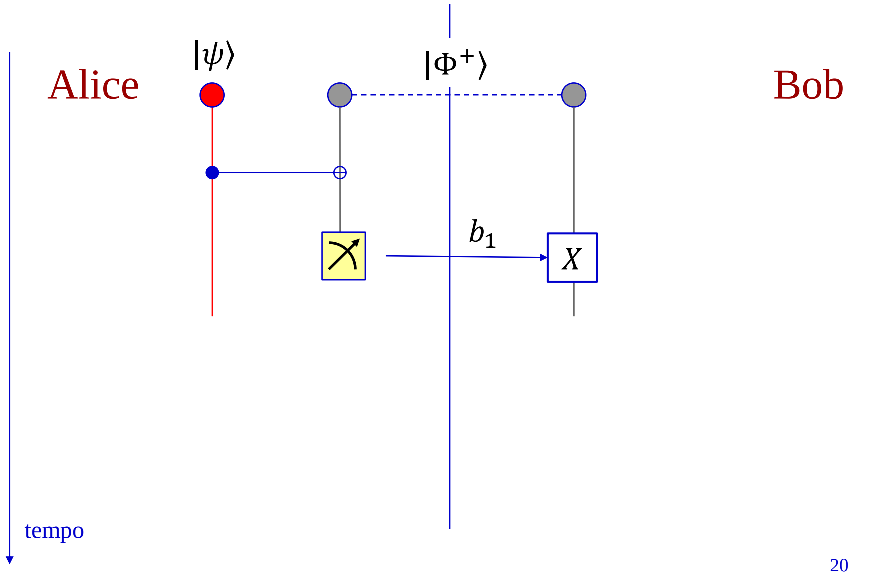
dopo la misura Alice chiama Bob

- Alice chiama Bob e gli dice 0
  - allora Bob sa che i due qubit valgono $\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|11\rangle$
- oppure Alice chiama Bob e gli dice 1
  - allora Bob sa che i due qubit valgono $\alpha_0|01\rangle + \alpha_1|10\rangle$
  - Bob applica un bit flip al *suo* qubit e ottiene $\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|11\rangle$

19

19

Alice e Bob



20

20

50-teletrasporto-03

come proseguire?

- ora che che il qubit da trasmettere e uno dei due qubit bit condivisi valgono $\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|11\rangle$ Alice e Bob cosa fanno?
  - se Alice misura il qubit da trasmettere e ottiene 0 allora anche Bob ottiene 0 e i valori α_0 e α_1 si perdono; lo stesso se Alice ottiene 1
  - così non funziona ancora!

21

21

Alice applica Hadamard

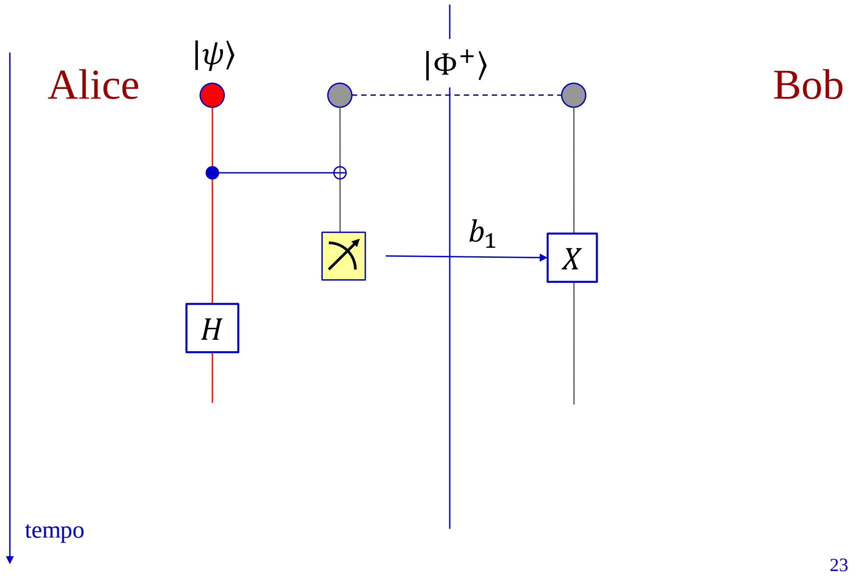
- ora che che il qubit da trasmettere e uno dei due qubit bit condivisi valgono $\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|11\rangle$ Alice e Bob cosa fanno?
- Alice applica Hadamard al primo qubit
- a partire da $\alpha_0|0\rangle \otimes |0\rangle + \alpha_1|1\rangle \otimes |1\rangle$ Alice ottiene $\alpha_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle + \alpha_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle$

22

22

50-teletrasporto-03

Alice e Bob



23

23

Alice *misura* il primo qubit

- ora Alice ha $\alpha_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle + \alpha_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$
- Alice misura il primo qubit
  - se ottiene 0 allora il secondo qubit va nello stato normalizzato $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$
  - se ottiene 1 allora il secondo qubit va nello stato normalizzato $\alpha_0|0\rangle - \alpha_1|1\rangle$

24

24

50-teletrasporto-03

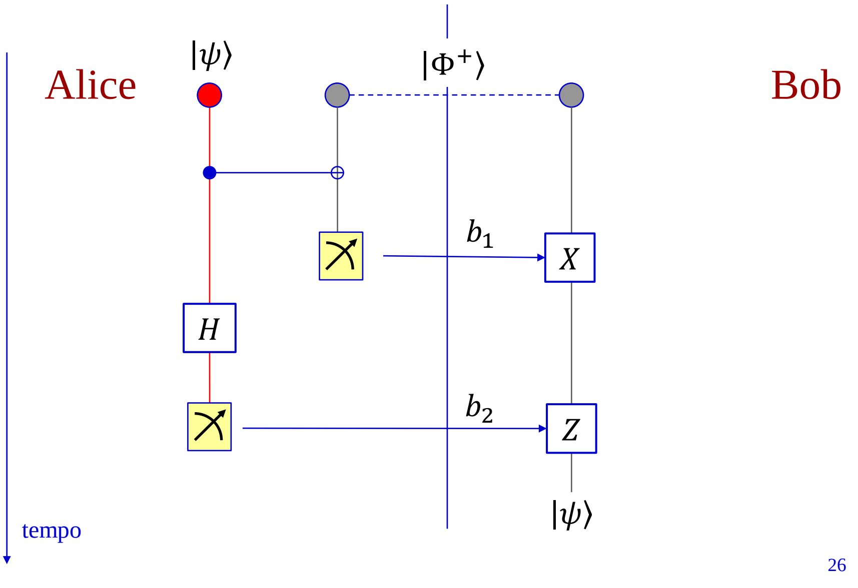
dopo la misura Alice richiama Bob

- Alice chiama Bob e gli dice 0
  - allora Bob sa che il qubit dalla sua parte vale $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$
- oppure Alice chiama Bob e gli dice 1
  - allora Bob sa che il qubit dalla sua parte vale $\alpha_0|0\rangle - \alpha_1|1\rangle$
  - Bob applica un phase flip al suo qubit e ottiene $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$

25

25

un protocollo per il teletrasporto



26

26

50-teletrasporto-03

Bob e gli operatori di Pauli

- se $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$
  - allora Bob esegue I
- se $b_1 = 1$ e $b_2 = 0$
  - allora Bob esegue X
- se $b_1 = 0$ e $b_2 = 1$
  - allora Bob esegue Z
- se $b_1 = 1$ e $b_2 = 1$
  - allora Bob esegue Y

27

27

extras

cat states

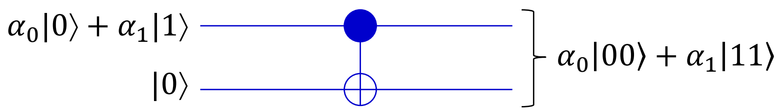
28

28

50-teletrasporto-03

due qubit entangled

- abbiamo visto come il $CNOT$ ci consenta di ottenere due qubit entangled
- se lo applichiamo ad uno stato generico $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ otteniamo $\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|11\rangle$

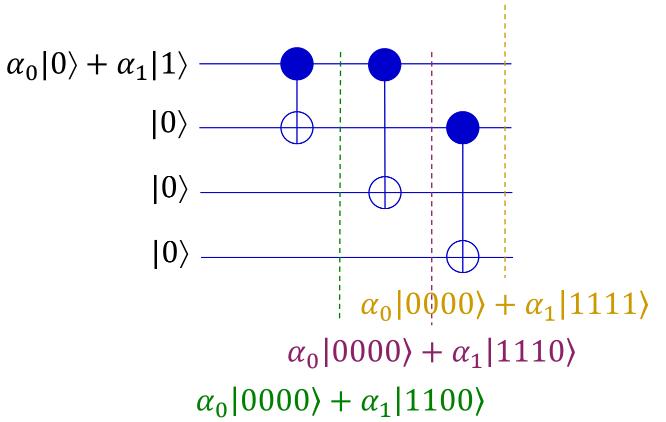


29

29

possiamo generalizzare

- aggiungiamo altri due qubit, entrambi nello stato $|0\rangle$, e facciamo altri due $CNOT$

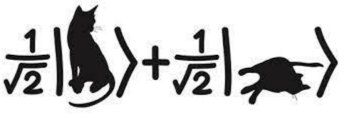


30

30

possiamo generalizzare

- possiamo ulteriormente generalizzare, aggiungendo altri qubit, nello stato $|0\rangle$ e facendo altri $CNOT$
- gli stati che otteniamo, nella forma $\alpha_0|00\cdots0\rangle+\alpha_1|11\cdots1\rangle$ sono detti *cat states*
  - ricordando il gatto di Schrödinger



31

31