Modellistica

Cos'è un modello
Caratteristiche dei modelli
Metodi formali
Esempi per sistemi semplici

(vedi Marro par. 1.1, 1.4)
(vedi Vitelli-Petternella par. I.1, I.1.1, I.1.2, I.2, I.2.1)

Modelli di Processi

Descrizione o realizzazione di un fenomeno o di un oggetto, che evidenzia alcuni aspetti di interesse

ESEMPI

Modello in scala
Modello analogico
Modello grafico
Modello matematico*

Realismo

Astrazione

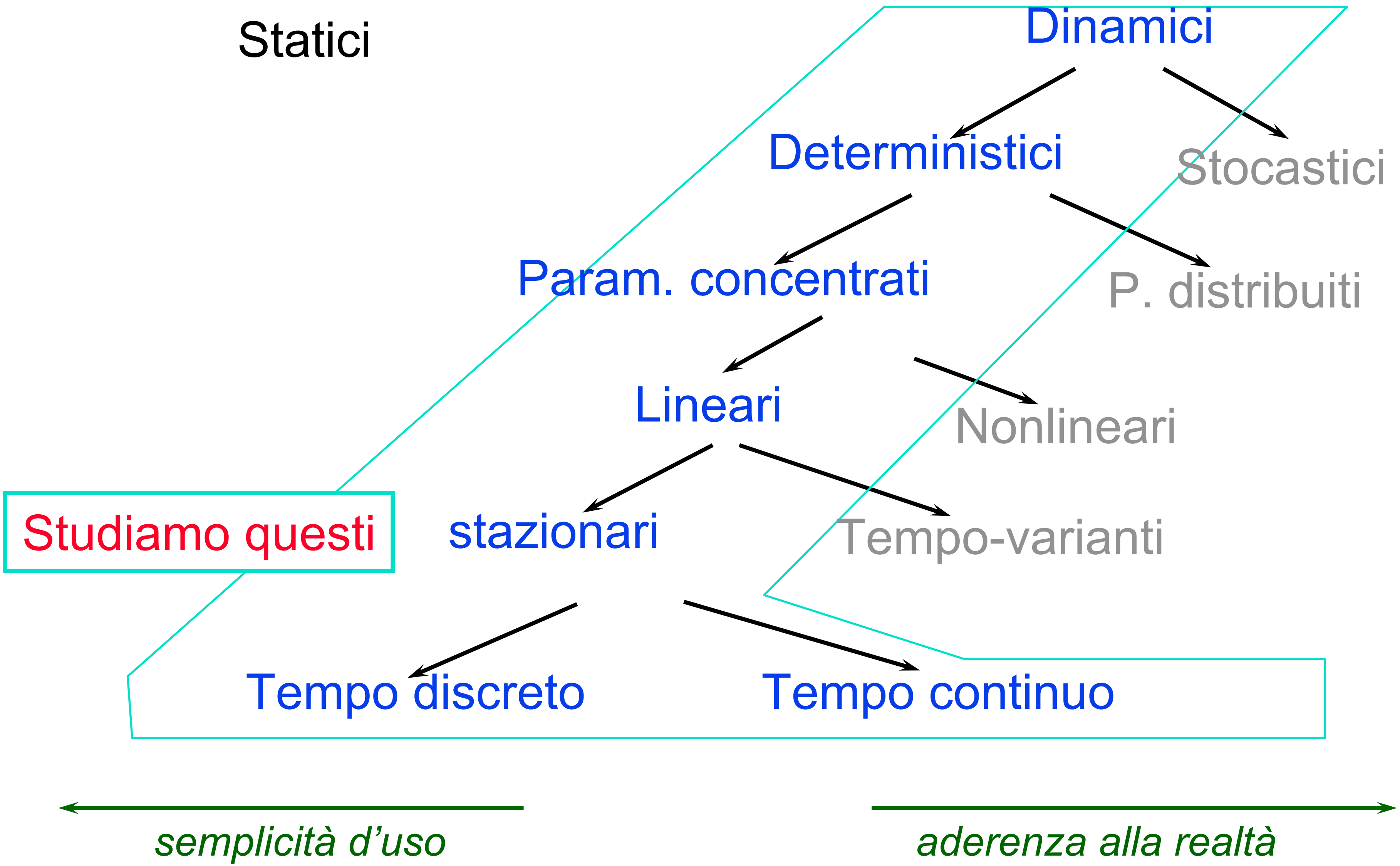
*** gli unici manipolabili in calcolatore.**

QUANTO DEVE ESSERE DETTAGLIATO UN MODELLO?

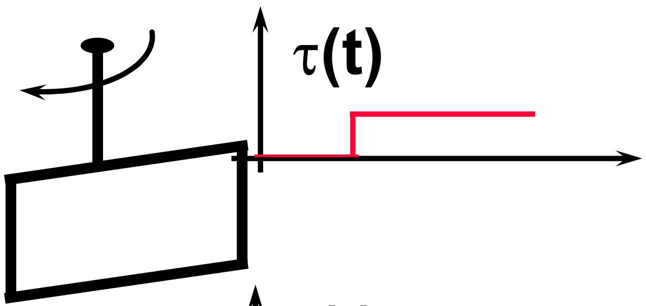
Dipende dallo specifico caso.

Esistono poche regole e l'esperienza.

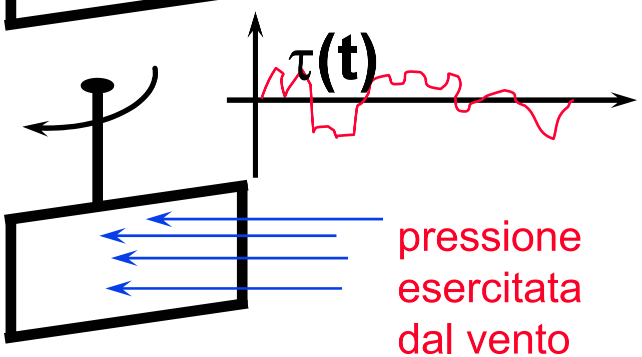
Spesso si inizia con un modello semplice poi
si è costretti ad affinarlo.


Statici
Dinamici
Deterministici
Stocastici
Param. concentrati
P. distribuiti
Lineari
Nonlineari
Studiamo questi
stazionari
Tempo-varianti
Tempo discreto
Tempo continuo
semplicità d’uso
aderenza alla realtà

Il modello è deterministico quando sono “ben” noti tutti gli ingressi applicati



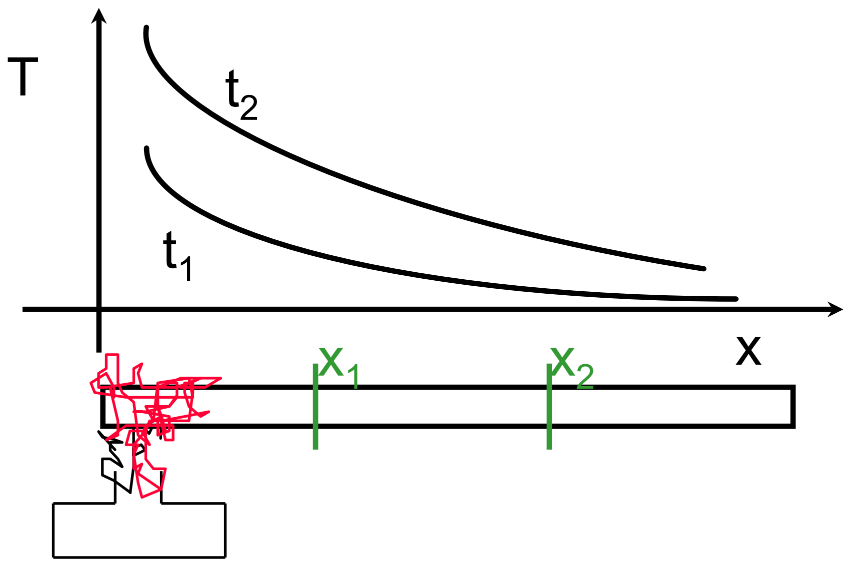
Esempio di situazione deterministica:
pendolo soggetto a
una coppia $\tau(t)$ nota,
descrivibile come funzione.

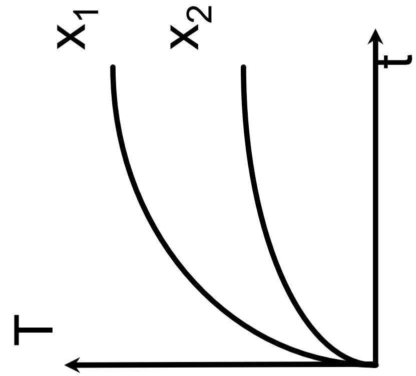


Esempio di situazione
non deterministica:
pendolo soggetto a una coppia t(t) derivante dalla pressione dal vento (caos dovuto a vorticosità).

Caso non deterministico: non si può/interessa determinare con esattezza il moto del pendolo istante per istante,
modellazione stocastica: il comportamento del sistema viene studiato utilizzando grandezze globali, invece di quelle istantanee
(ad es. la media, la varianza, ecc..).

Il modello matematico è lo stesso, cambia il modo di impiegarlo





T=T(x,t)

x_1 , x_2=sensori di temperatura

Equazione differenziale alle derivate parziali

Difficilissima da trattare in generale

$$f\left(T, \frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = 0$$

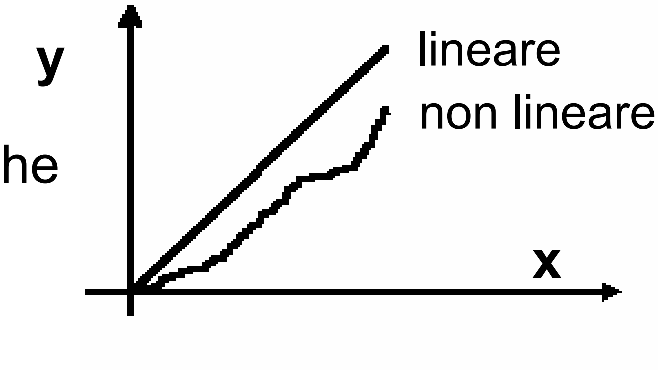
Soluzione

Considerare N elementi(detti elementi finiti) con T= costante all'interno

T_1	T_2	T_3	T_4	.....	T_N

Per ognuno scrivere un'equazione ottenendo N equazioni differenziali ordinarie

Sulle caratteristiche statiche

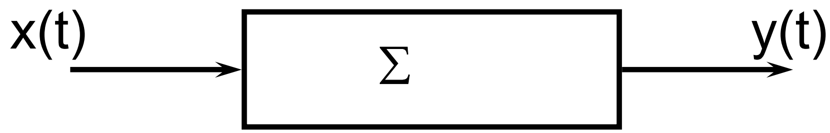


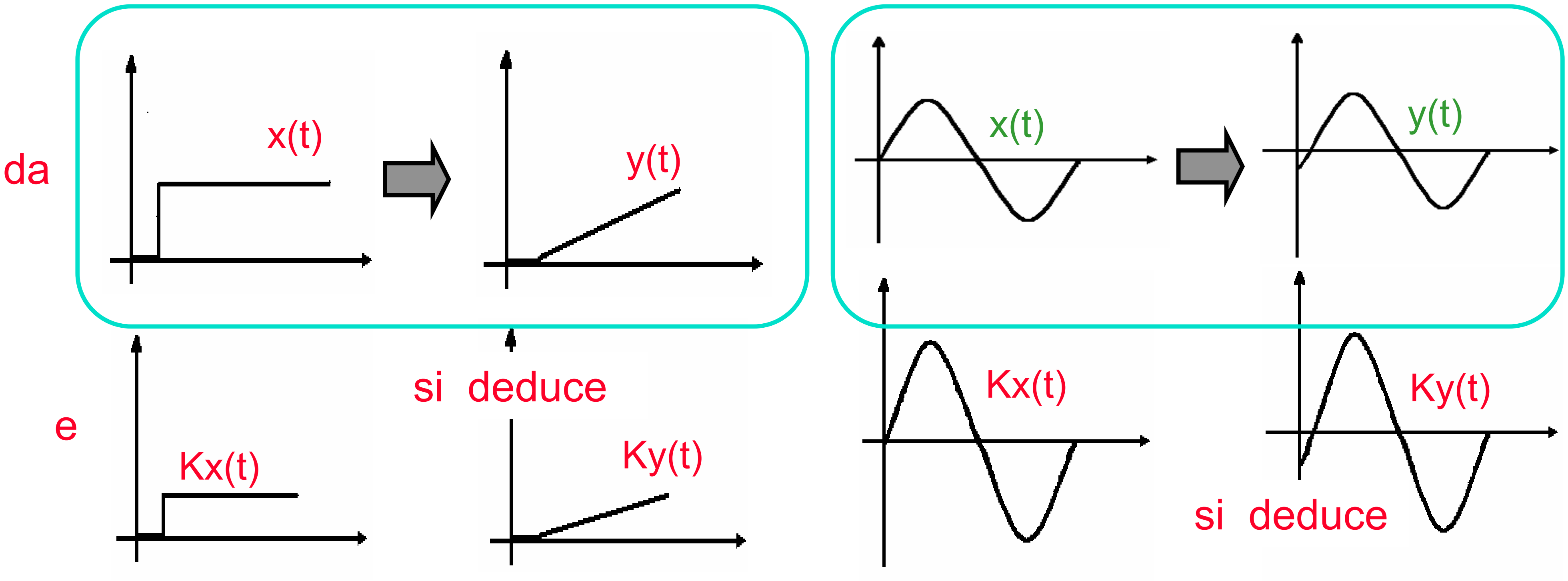
y=f(x) è lineare se $y = f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2) = ay_1 + by_2$

detto PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

LINEARE	NON LINEARE
$y = kx$ $y = \dfrac{dx}{dt}$ $y = \int xdt$	$y = x^2$ $y = \lvert x \rvert$ $y = sign(x)$ $y = e^x$

Utilità della Linearità



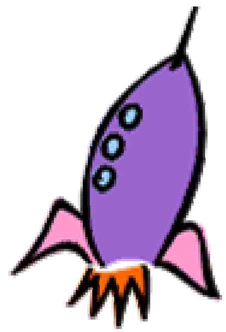


stessa frequenza !!!!

Si intuisce che la conoscenza necessaria sul sistema si riduce notevolmente: il modello può essere “compattato”

Tempo varianti (non stazionari)

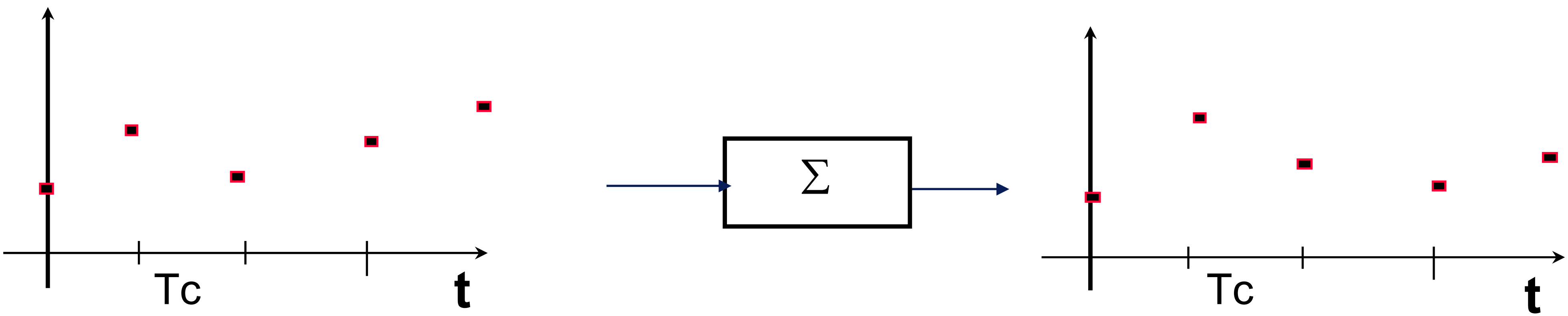
$$y = k(t) \cdot x$$



$$F = M(t) \cdot a$$

(analogo ad un missile che consuma il propellente)

Tempo discreto

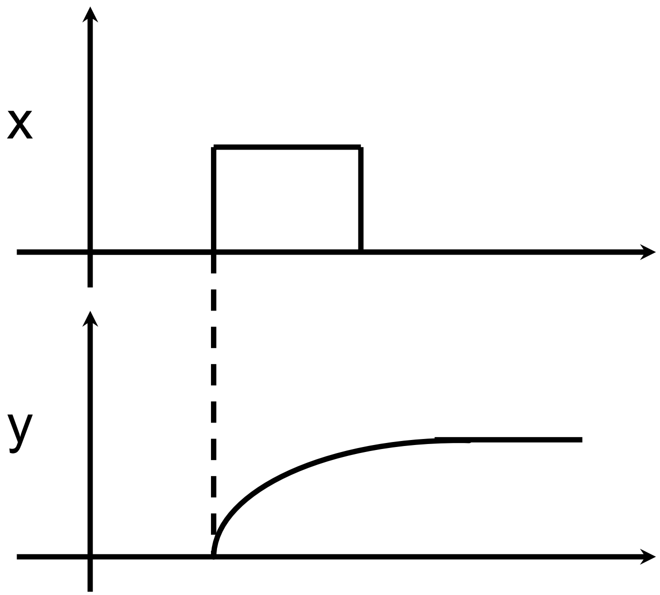


Invece di eq. differenziali, eq. alle differenze:

Es. Programmi di simulazione sul computer.

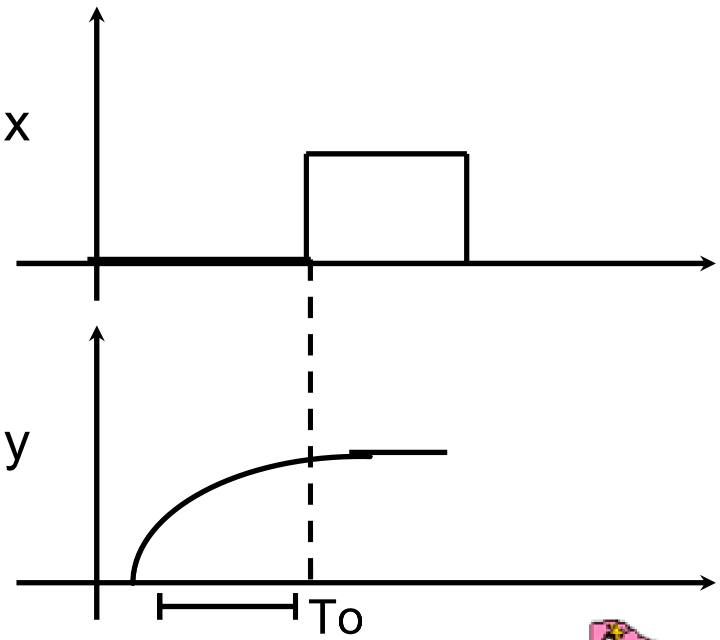
$$x_{k+1} = bx_k + au_k$$

Causalità (proprietà di...)



causale

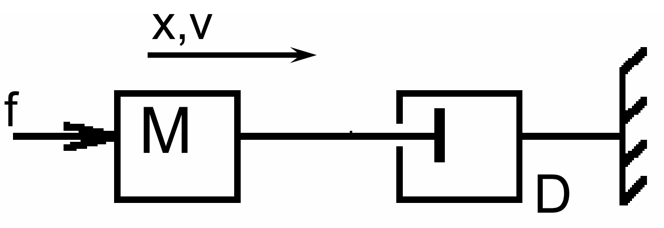
$$y(t) = f\big(x(t)\big)$$



non causale

$$y(t) = f\big(x(t+t_0)\big)$$

modello grafico



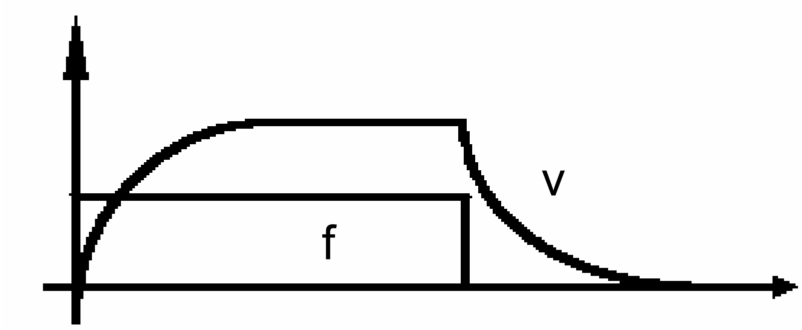
$v = \dot{x}$

1° livello di astrazione

equazione

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}(f - vD)$$

diagrammi



Si perde il "meccanismo" FISICO

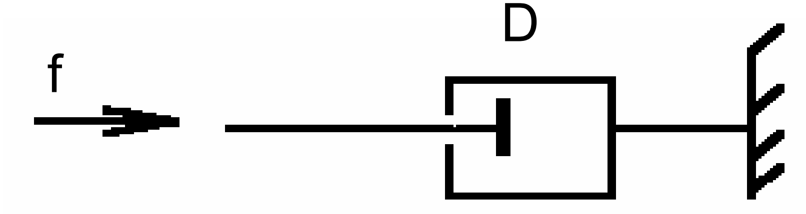
Modello in scala: non riportabile qui in quanto non è informazione

(vedi carrello.wm, carrellomolla.wm, duecarelli.wm, risp_quadra2ord.wm, risp_seno2ord.wm realizzati in Working Model 2D)

ATTENZIONE al livello di dettaglio

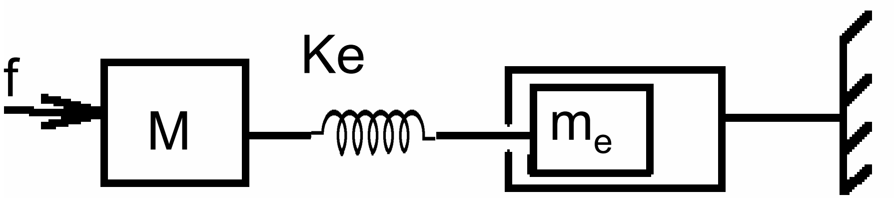
- fenomeni molto lenti:

$$M\frac{dv}{dt} \cong 0$$



f = v D

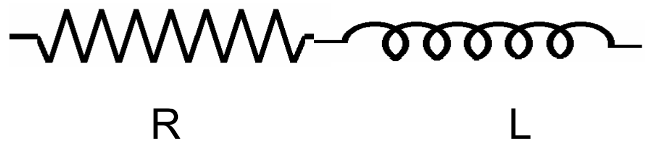
- fenomeni molto veloci



inoltre F non è costante con la velocità di spostamento

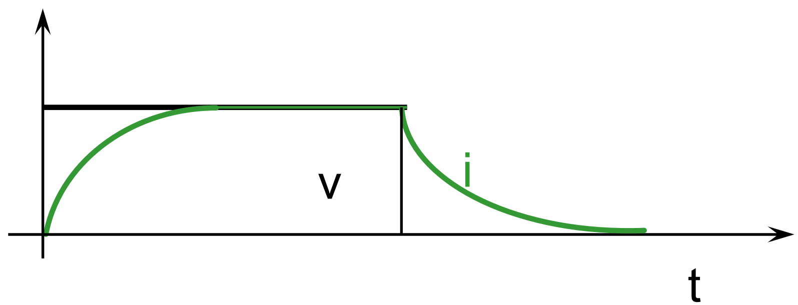
Il modello “ottimo” va determinato in base alle esigenze del problema

POSSIBILI MODELLI



anche questo è
un modello

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}$$

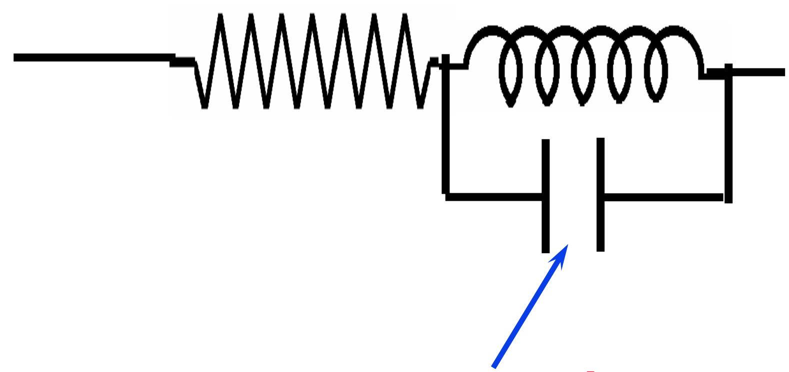


Quello in scala ha l'inconveniente
di non essere informazione pura

MA:

Se la frequenza è molto bassa

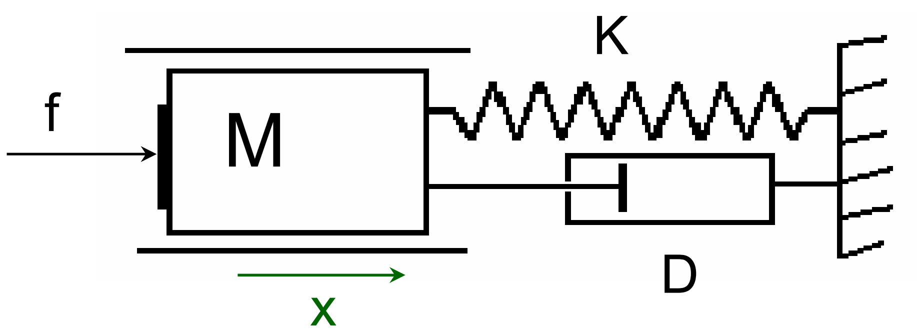
Se la frequenza è molto alta



capacità
parassita

ed esistono altre varianti importanti

Il modello “ottimo” va determinato
in base alle esigenze del problema



molla: $f_e = -K x$

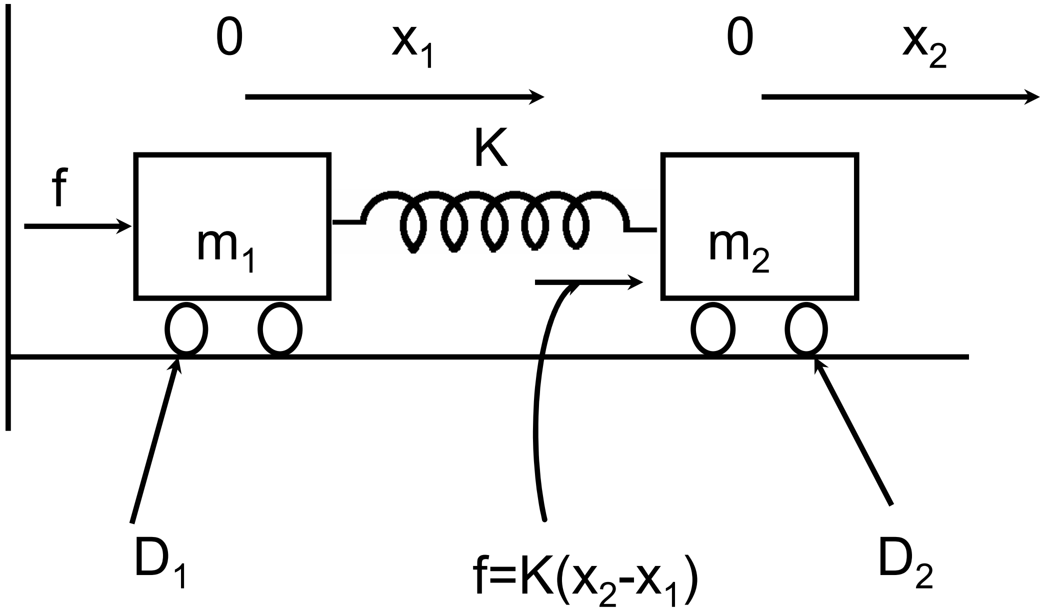
smorzatore: $f_s = -D\dot{x}$

x=0 ≡ riposo della molla

$$M\ddot{x} = \sum_i f_i = f - Kx - D\dot{x}$$

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = f$$

Equivale al circuito RLC



Scelti in modo che quando $x_1=x_2=0$ la molla sia a riposo

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = f + K(x_2 - x_1) - D_1\dot{x}_1 \\ \\ m_2\ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1) - D_2\dot{x}_2 \end{cases}$$

Diagramma schematico del sistema e definizione delle variabili

Derivazione delle equazioni matematiche dei componenti elementari (blocchi).

Interconnessione dei modelli elementari

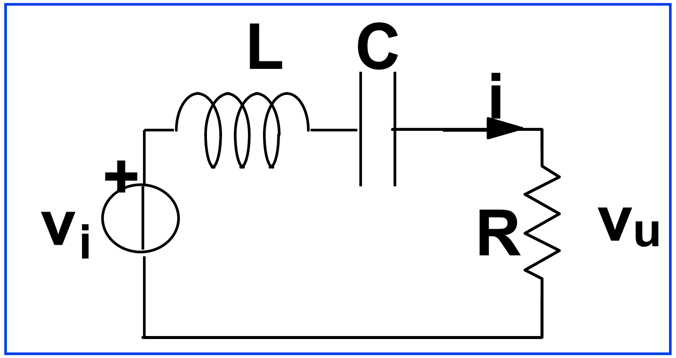
Validazione sperimentale (confronto tra simulazioni e esperimenti)

utili

eq. di equilibrio	
Kirchoff:	Σ elettrici
Lagrange:	Σ meccanici
Bernoulli:	Σ idraulici

ALTERNATIVAMENTE Identificazione del modello dalle misure (legame ingresso-uscita)

$$\boxed{\sum v = 0}$$



$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_c(0) + Ri(t) = v_i(t)$$

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dv_i}{dt}$$

$$v_u = Ri(t)$$

Un eq. del 2° ordine

Oppure...

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = -\left(v_c(t) + Ri\right) + v_i(t) \\ C\dfrac{dv_c}{dt} = i(t) \end{cases}$$

Due eq. del 1° ordine

$$v_u = Ri(t)$$

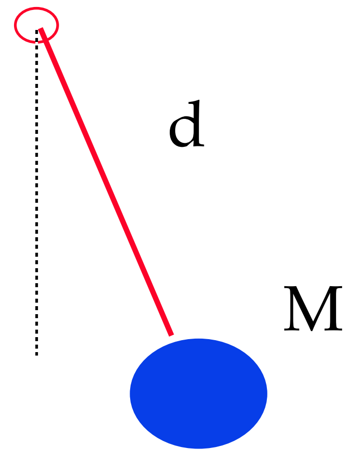
Le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i$$

$$L = T - U$$

T **: en. cinetica**
U **: en. potenziale**

q_i**: coord. Lagrangiane (posizioni)**



***q*:** angolo dalla verticale
u: coppia al fulcro

$$T = \frac{1}{2} I \dot{q}^2 \qquad U = U_0 - Mgd\cos(q)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}(I\dot{q}) = I\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -Mgd\sin(q)$$

(vedi pendolo.wm, pendolo_coppia.wm realizzati in Working Model 2D)

$$I\ddot{q} + Mgd\sin(q) = u(t)$$

Due formati standard

a) Un equazione differenziale di ordine **N**

$$a_N \frac{d^N y}{dt^N} + \cdots + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M u}{dt^M} + \cdots + b_0 u(t)$$

"Relazione ingresso - uscita"

b) **N** equazioni differenziali di 1° ordine

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_1^N a_{1h} x_h + \sum_1^M b_{1k} u_k \\ \\ \dot{x}_N = \sum_1^N a_{Nh} x_h + \sum_1^M b_{Nk} u_k \end{cases}$$

dove X è lo STATO

"Relazione ingresso - stato"

per ora assumiamo che l'uscita sia uno degli stati

Ma lo stato è qualcosa di più di una sostituzione di variabili ....