Trasformate e sistemi lineari

Trasformata di Laplace
Funzione di Trasferimento
Modi
Risposta Impulsiva
Calcolo dell'uscita noto l'ingresso

(vedi Marro par. 2.1 a 2.3,2.5, C 2.2, C 2.3)
(vedi Vitelli-Petternella par. II.1 a II.4 , III.1 a III.3)

Metodi di calcolo basati sulla Trasformata di Laplace

Si possono operare delle trasformazioni su segnali nel dominio del tempo (o dello spazio) in modo da:

- mettere in evidenza le caratteristiche periodiche o pseudoperiodiche del segnale (dominio della frequenza);
- facilitare alcune operazioni matematiche, quali l'integrazione o la derivazione, rendendole puramente algebriche.

Formalmente la Trasformata di Laplace F(s) di una funzione f(t) è l'integrale:

$$f(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} \quad dt$$

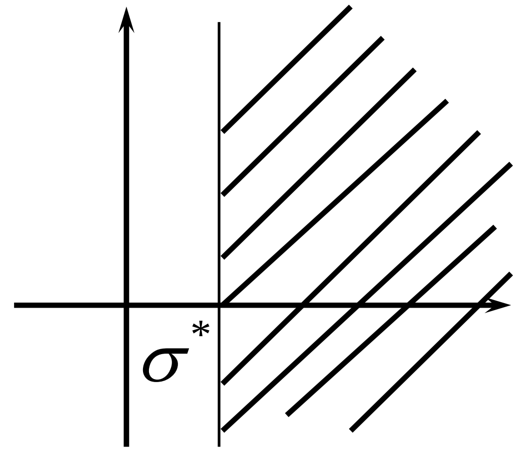
$$con \quad s = \sigma + j\omega \qquad\qquad (f(t) = 0,\ t < 0)$$

*hp tecniche: $f(t)e^{-st}$ sommabile:

$\exists \sigma^*, \forall s : \mathrm{Re}[s] \geq \sigma^*$

$\int f(t)e^{-st}dt$ è determinato e finito

$\Rightarrow \exists F(s)$

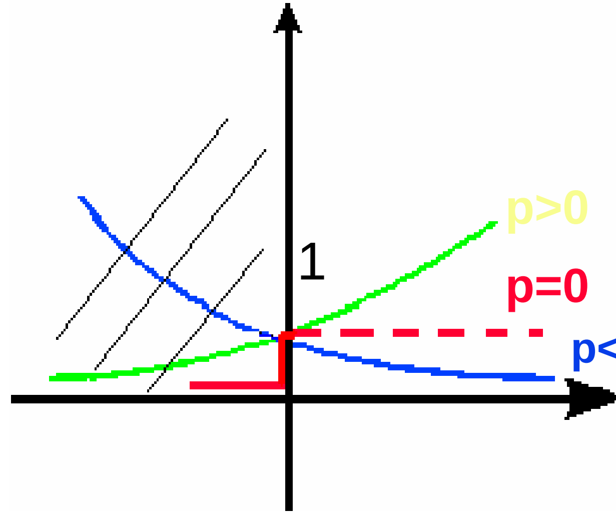


$\sigma^* =$ ascissa di convergenza

Una Trasformata Fondamentale

$$f(t)=\begin{cases} e^{pt} & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$

p può essere anche complesso



$$F(s)=\int_0^\infty e^{pt}\,e^{-st}\,dt=\frac{1}{p-s}\left[e^{(p-s)t}\right]_0^\infty=\frac{1}{s-p}\quad \text{se}\ \ \mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[p]=\sigma^*$$

$$L\left\{e^{pt}\right\}=\frac{1}{s-p}$$

utile per trasformare
sin(t) e cos(t)

$$L\left\{e^{j\omega t}\right\}=\frac{1}{s-j\omega}$$

Trasformate derivate dall'esponenziale

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

Gradino, step, funzione di Heaviside:

$$\mathrm{L}\{K\delta_{-1}(t)\} = \frac{K}{s}$$

$$L\{\sin(\omega t)\} = L\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$L\{\cos(\omega t)\} = L\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\}$$

LINEARITA'

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^-} F(s)$$

TEOREMA del VALORE FINALE
(solo se l'ascissa di convergenza di F(s) è minore o uguale a zero)

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

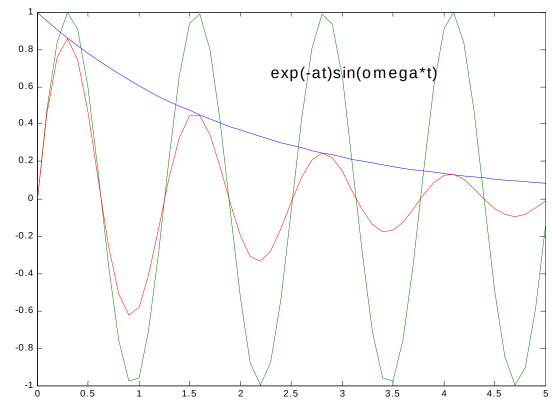
TEOREMA del VALORE INIZIALE

$$F(s^*) = F^*(s)$$

CONIUGATO

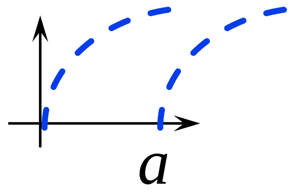
ESPONENZIALE • FUNZIONE del TEMPO

$$L\left\{e^{at} f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, f(t)\, dt = F(s-a)$$



TRASLAZIONE

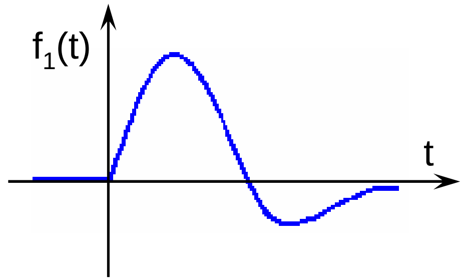
$$L\left\{\delta_{-1}(t-a)\, f(t-a)\right\} = e^{-as} F(s)$$

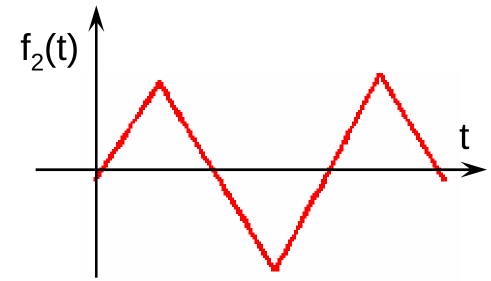


Convoluzione

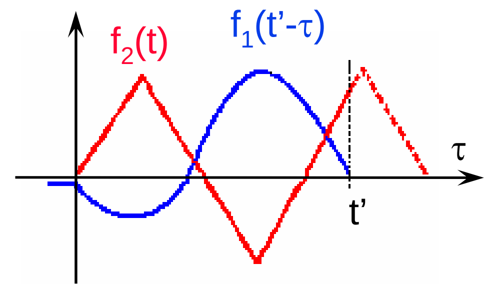
$$g(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

Rappresentazione grafica:





$$L\{g(t)\} = L\{f_1(t)\} \cdot L\{f_2(t)\}$$



Dim: $G(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt =$

$$= \int_0^\infty f_2(\tau) \left[\int_0^\infty f_1(t-\tau) e^{-st} dt \right] d\tau =$$

Il valore di g(t) in t' dipende dal passato

L di funzione ritardata

$$= \int_0^\infty f_2(\tau) \cdot F_1(s) e^{-s\tau} d\tau = F_1(s) \int_0^\infty f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$\mathrm{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

Dim: integriamo per parti notando che $\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right) = \frac{df(t)}{dt}e^{-st} - f(t)se^{-st}$

$$\mathrm{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right)dt + \int_0^\infty f(t)se^{-st}dt =$$

$$= \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty + sF(s) = -f(0^-) + sF(s)$$

$$\mathrm{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = \underbrace{s^2F(s)}_{\text{per } f(0^-)=0} - sf(0^-) - \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0^-}$$

“0” è sempre da leggere “0-”

$$\mathrm{L}\left\{\frac{d^3}{dt^3}f(t)\right\} = s^3F(s) - s^2f(0^-) - s\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0^-} - \left.\frac{d^2f}{dt^2}\right|_{t=0^-}$$

$$L\left\{\int_0^t f(t)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Dim:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)\cdot G(s)$$

se poniamo

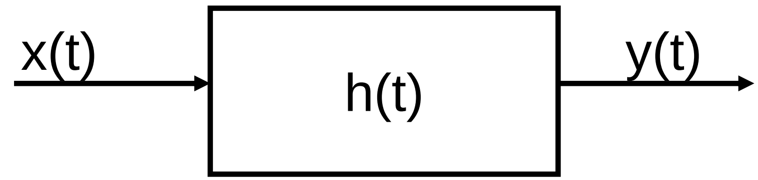
$$g(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)\delta_{-1}(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)\cdot\frac{1}{s}$$

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = F(s)\cdot\frac{1}{s}$$

Inpulso matematico di Dirac: limite di una distribuzione ad area costante unitaria

y(t)=$\int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$



Se poniamo l'ingresso pari ad un impulso

y(t)=$\int_0^t \delta_0(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = h(t)$ (risposta inpulsiva)

Nel dominio di Laplace

$Y(s) = X(s)H(s)$

Notiamo che la trasformata di Laplace dell'inpulso vale

$$L\{\delta_0(t)\} = \int_0^\infty \delta_0(t)\, e^{-st}\, dt = 1$$

Quindi

$Y(s) = H(s)$

e perciò H(s) è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva

$$\delta_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{(supponendo sempre } t > 0\text{)}$$

$$L\left\{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right\} = \frac{1}{s} L\left\{\frac{d}{dt}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right\} = \frac{1}{s} L\left\{\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\right\}$$

Quindi :

$$L\{\delta_0(t)\} = 1 \text{ (impulso)} \qquad L\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s} \text{ (gradino)} \qquad L\{\delta_{-2}(t)\} = \frac{1}{s^2} \text{ (rampa)}$$

...

$$L\{\delta_{-k}(t)\} = L\left\{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right\} = \frac{1}{s^k}$$

oppure:

$$L\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

Polinomi per esponenziali

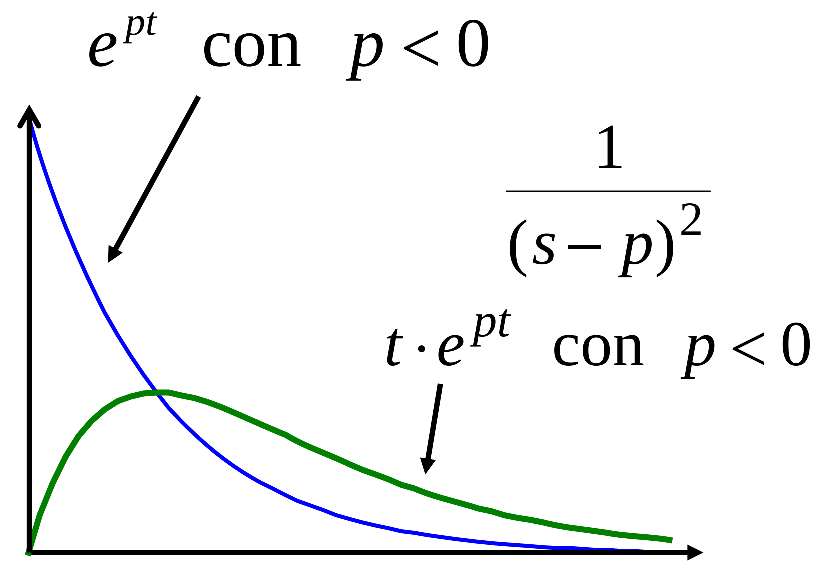
$$L\left\{\frac{t^{(k-1)}e^{pt}}{(k-1)!}\right\} = \frac{1}{(s-p)^k}$$

Dim:

$$L\left\{\frac{t^{(k-1)}e^{pt}}{(k-1)!}\right\} = \int_0^\infty \frac{t^{(k-1)}e^{pt}}{(k-1)!} e^{-s\,t}\, dt = \int_0^\infty \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} e^{-(s-p)\,t}\, dt$$

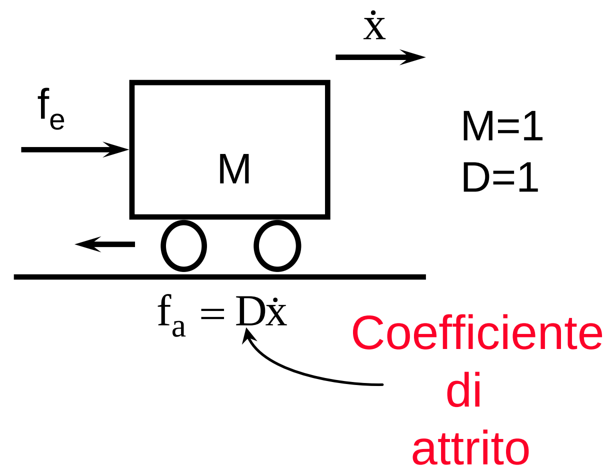
posto s - $p = \xi$

$$\int_0^\infty \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} e^{-\xi\, t}\, dt = \frac{1}{\xi^k} = \frac{1}{(s-p)^k}$$



Esistono anche poli complessi multipli,
con analogo comportamento

Carrellino con attrito viscoso e forza applicata



ingresso: $$f_e = \delta_{-1}(t) \rightarrow F_e(s) = \frac{1}{s}$$

equazioni:

$$M\dot{v} = f_e(t) - Dv$$

$$\boxed{t} \xrightarrow{L} \boxed{s}$$

v(0)=0

$$M\left[sV(s) - v(0)\right] = F_e(s) - DV(s)$$

$$[sM + D]V(s) = F_e(s)$$

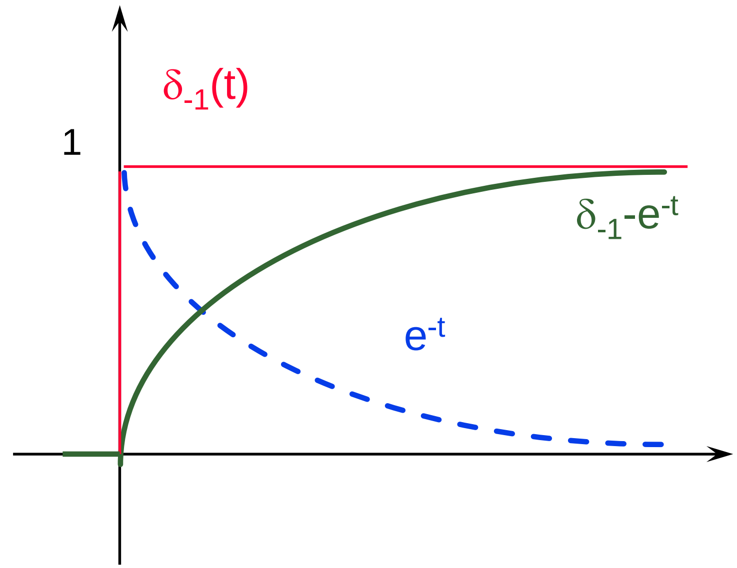
$$V(s) = \frac{1}{Ms + D} \cdot F_e(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\lim_{s \to 0} s \frac{1}{s+1}\frac{1}{s} = 1$$

... Esempio elementare

$$V(s)=\frac{B}{s+1}+\frac{A}{s}=\frac{As+A+Bs}{(s+1)s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$\boxed{s} \xrightarrow{L^{-1}} \boxed{t}$$



$$v(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]=\underbrace{L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+L^{-1}\left[-\frac{1}{s+1}\right]}=\delta_{-1}(t)-e^{-t}$$

La trasformata della somma è uguale alla somma delle trasformate

Abbiamo risolto l'eq. differenziale tramite un eq. algebrica

Partiamo da un rapporto di polinomi, in quanto consideriamo sistemi a costanti concentrate (in genere), $m \leq n$ per la causalità

$$\sum a_i s^i = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + a_0 = a_n (s-p_n)\ldots(s-p_1)$$

p_i : poli della trasformata $\equiv$ zeri del denominatore

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}$$

Espansione in frazioni parziali:

$$\boxed{\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_n}{a_n} + \sum_{1}^{n} \frac{R_i}{(s-p_i)} \qquad R_i \ : \ \text{Residui}}$$

$$R_i = \lim_{s \to p_i} (s-p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \quad \underbrace{se \ \ p_i \neq p_j}_{poli \ \ semplici}$$

in pratica

$$\frac{N(p_i)}{a_n (p_i - p_n) \ldots . (\cancel{p_i - p_i}) \ldots . (p_i - p_1)} (\cancel{p_i - p_i})$$

Poli Reali Multipli

Se il k-mo polo compare r volte, lo sviluppo prende questa forma:

$$\frac{R_k^{(1)}}{s-p_k}+\frac{R_k^{(2)}}{(s-p_k)^2}+....+\frac{R_k^{(r)}}{(s-p_k)^r}$$

con

$$R_k^{(j)}=\lim_{s\to p_k}\frac{1}{(r-j)!}\frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}}\left[(s-p_k)^r\frac{N(s)}{D(s)}\right]$$

Esempi poli reali multipli

Esempio tipico r = 2

$$R_k^{(1)} = \lim_{s \to p_k} \frac{d}{ds}\left[(s-p_k)^2 \frac{N}{D}\right] \qquad R_k^{(2)} = \lim_{s \to p_k}\left[(s-p_k)^2 \frac{N}{D}\right]$$

$$L\left[\delta_{-1}(t)(1-t)\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} = \frac{s-1}{s^2}$$

Una trasformata con 2 poli nell'origine

Calcolando i residui,
si ritrovano i coeff. corretti

$$R^{(1)} = \frac{d}{ds}(s-1)\Big|_{s=0} = 1;$$

$$R^{(2)} = (s-1)\big|_{s=0} = -1$$

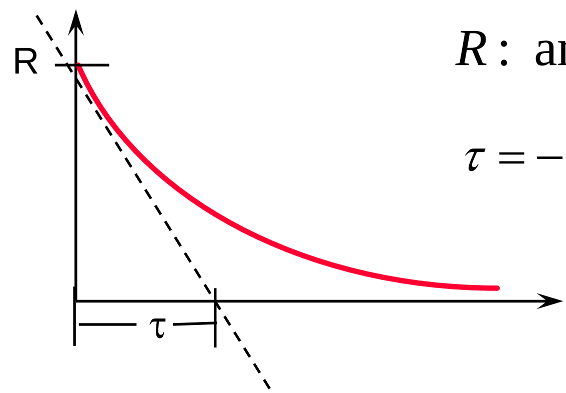
Parametri dei poli reali semplici

Conviene definire dei parametri pratici per caratterizzare gli andamenti

Poli reali $$Y_t(s) = \frac{\sum b_i s^i}{(s-p)(........)}$$

$$y(t) = \mathrm{R}e^{pt}$$

$$\dot{y}(0) = Rp$$



$R:$ ampiezza del modo

$\tau = -\frac{1}{p}$ Costante di tempo

Se il modo è convergente [p < 0] si può considerare estinto per t > 3τ

$$\frac{y(3\tau)}{y(0)} = 5\%$$

Parametri dei poli complessi coniugati

$$Y_t(s) = \frac{\sum b_i s^i}{\left(s^2 + a_1 s + a_0\right)(\ldots\ldots.)}$$

Radici $p = \sigma + j\omega, \quad p^*$; Residui R, R^*

Antitrasformata

$$R = |R|e^{j\varphi}, \quad R^* = |R|e^{-j\varphi}; \quad p = \sigma + j\omega$$

$$y(t) = |R|e^{j\varphi}e^{(\sigma+j\omega)t} + |R|e^{-j\varphi}e^{(\sigma-j\omega)t} = |R|e^{\sigma t}\left[e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}\right] = 2|R|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Terminologia

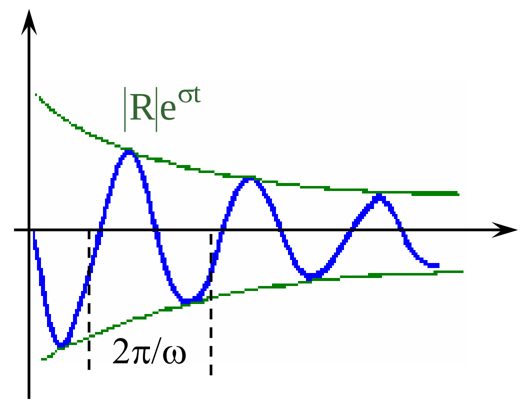
$$(s-p)(s-p^*) = s^2 - 2\sigma s + \left(\omega^2 + \sigma^2\right) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

ω_n=pulsazione naturale,
ζ :coefficiente di smorzamento

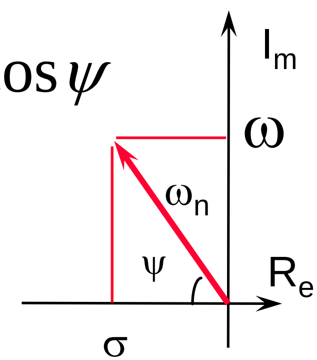
$\zeta \geq 1$ i poli sono reali

$\zeta < 0$ diverge

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$



$$\zeta = \cos\psi$$



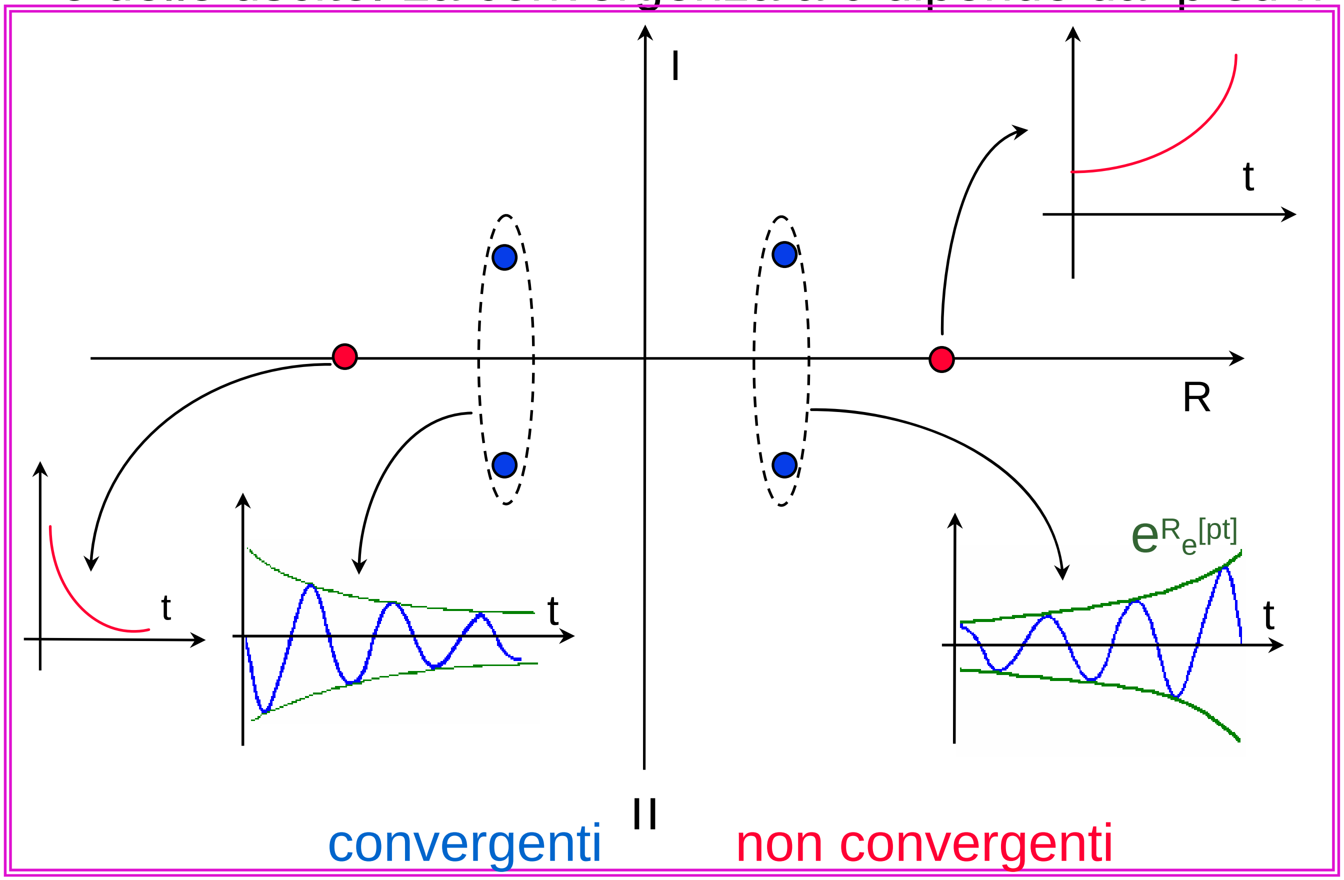
Andamenti vs. posizione dei Poli

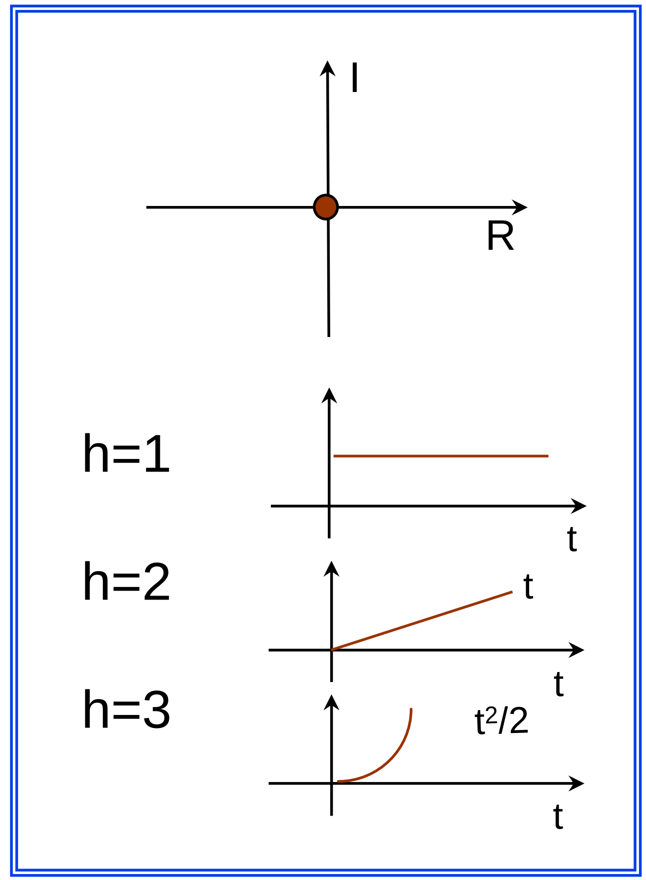
Una W(s) razionale* si fattorizza in termini del tipo:

$$\frac{R}{(s-p)^h} \qquad \textit{nel tempo}: \quad \frac{R t^{h-1} \cdot e^{pt}}{(h-1)!}$$

* Attenzione: esistono W(s) non razionali !

e solo Combinazioni Lineari di essi compaiono nelle evoluzioni libere dello stato e delle uscite. La convergenza a 0 dipende da p ed h





Andamenti elementari

$$L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right]$$

con G(s) razionale, è somma di

Esponenziali	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
Sinusoidi smorzate	$e^{\sigma t}\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{1}{s^2+as+b}$
Polinomi	$1, t, \frac{t^2}{2}, \ldots$	$\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3}, \ldots$
Polinomi x esponenziali	$t\,e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
Raramente impulsi	$\delta(t)$	1

(per t ≥ 0)

1. Il loro numero è pari al grado del denominatore (le sinusoidi contano per 2)

2. La posizione dei poli sul piano s, determina gli andamenti

3. La convergenza a 0 dipende da Re[p_i]