Applicazione delle Trasformate di Laplace alle eq. differenziali

Applicazione alle eq. diff. Ingresso Uscita

Eq. diff. ordinaria, lineare, stazionaria, ordine=n : LPPC

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t)$$

$$\mathrm{L}\left[\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right] = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} \dot{y}(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0) = s^n Y(s) - \sum_{K=0}^{n-1} s^{n-k-1} y^{(k)}(0)$$

condizioni iniziali

quindi:

$$a_n s^n Y(s) + \ldots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) + CI_y^{(n-1)}(s) = b_m s^m U(s) + \ldots + b_0 U(s) + CI_u^{(m-1)}(s)$$

risolvendo per Y(s)

$$\boxed{Y(s) = \underbrace{\frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots a_0} U(s)}_{A} - \underbrace{\frac{CIy^{(n-1)}(s)}{a_n s^n \ldots a_0}}_{B} + \underbrace{\frac{CI_u^{(m-1)}(s)}{a_n s^n \ldots a_0}}_{C}}$$

Il denominatore $a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$ compare in tutti gli addendi.

E' il polinomio caratteristico (dell'eq. omogenea)

Applicazione alle eq. diff. Ingresso Uscita

$$Y(s) = \underbrace{U(s)\frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}}_{A} - \underbrace{\frac{CI_y}{\sum a_i s^i}}_{B}\left[\underbrace{+\frac{CI_u}{\sum a_i s^i}}_{C}\right]$$

$$G(s) = \frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i} \rightarrow$$ Funzione di Trasferimento del sistema descritto dall'equazione diff.

- I termini A e C sono nulli se $u(t) \equiv 0$ ➡ *B rappresenta l'evoluzione libera del sistema*
- In particolare, C è nullo se $u(t)=0$ per $t \leq 0$
- Den(C) = Den(B) ➡ *Se l'evoluzione libera (B) converge, converge anche C.*
- Den(A) contiene i poli di B + quelli della trasformata dell'ingresso. ➡ *I modi presenti nell'uscita sono quelli propri del sistema + quelli dell'ingresso*

➡ *Se i modi del Sistema convergono a zero nel lungo periodo rimangono solo quelli dell'ingresso:*

⬇

IL SISTEMA E' STABILE

Primo criterio intuitivo di stabilita:
"è stabile se basta azzerare l'ingresso per riportare il sistema a riposo" !

$$\boxed{Y(s) = U(s)\frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i} - \frac{CI_y}{\sum a_i s^i}\left[+\frac{CI_u}{\sum a_i s^i}\right]}$$

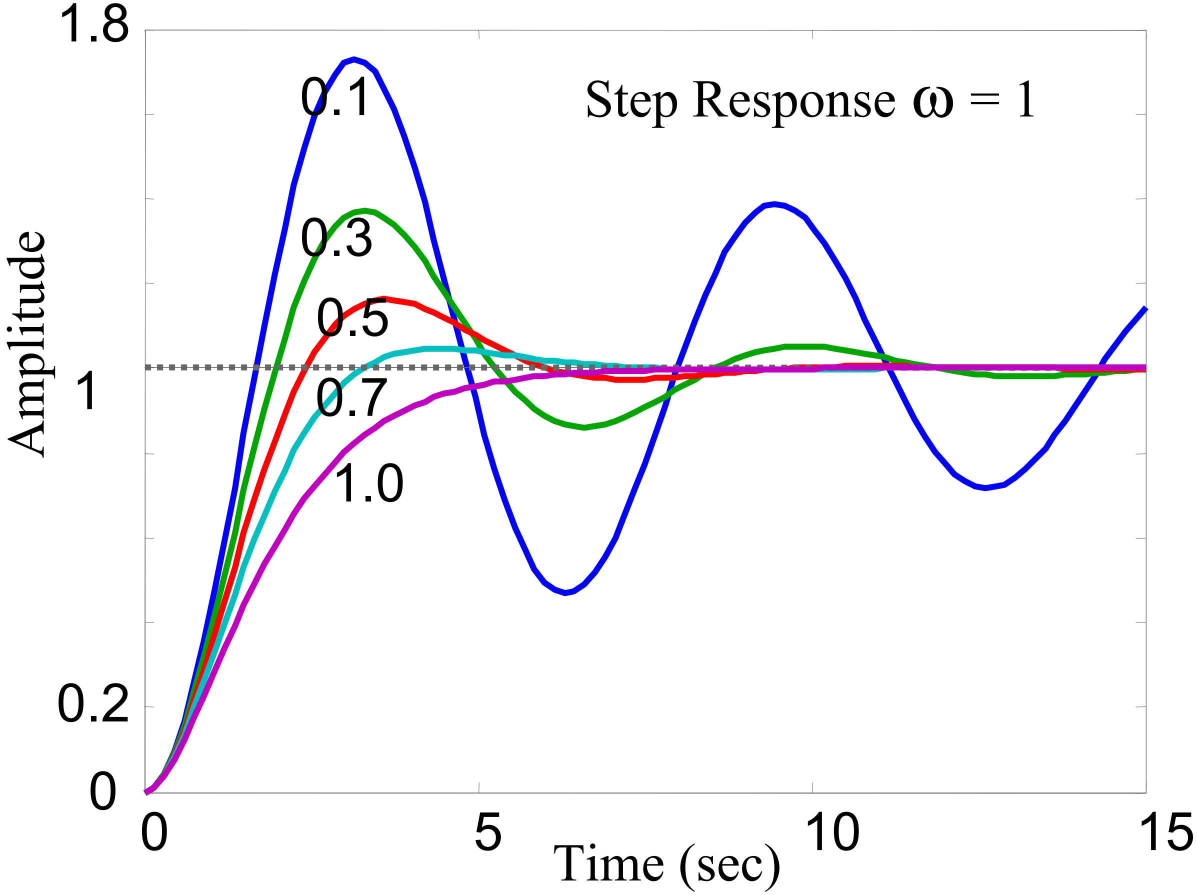
Libera: $$U(t) = U(s) \equiv 0 \Rightarrow Y(s) = -\frac{CI_y}{\sum a_i s^i}\left[\cancel{+\frac{CI_u}{\sum a_i s^i}}\right]$$

Forzata: $$CI_y \equiv 0 \Rightarrow Y(s) = U(s)\frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i} - \cancel{\frac{CI_y}{\sum a_i s^i}}\left[\cancel{+\frac{CI_u}{\sum a_i s^i}}\right]$$

errore! =0 se u(t)=0 t<0

SSE il sistema e' stabile :

Forzata
- transitorio: prima dell'estinzione dei modi naturali del sistema
- permanente : dopo rimane solo la parte con i poli dell'ingresso



Risposta al gradino:
gradino (permanente)
oscillazione (transitorio)

Al diminuire di ζ, aumenta il comportamento oscillatorio

Per ζ = 0 si ha una sinusoide intorno a 1
(i poli sono a Re[ ]=0, sistema non asintoticamente stabile).

L'antitrasformata di: $G(s)=\dfrac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}$ è composta da (è combinazione lineare di...):

- Esponenziali $e^{a\,t}, \quad e^{a\,t}\sin(\omega\;t+\varphi)$
- Polinomi del tempo: $t^0 \;\; (=\text{cost}), \quad t, \quad \dfrac{t^2}{2}, \quad \dfrac{t^3}{3!}.....$
- Polinomi(t) per esponenziali: te^{at}
- Eventualmente Impulsi nell'origine (al limite della causalità): $\delta_0\,(t)$

Sono i MODI NATURALI del Sistema. Il loro numero è pari all'ordine dell'eq. differenziale (le sinusoidi contano per 2)

Le caratteristiche del sistema si riflettono sulla posizione dei poli sul piano s (Re[s], Im[s]).

La convergenza dipende dalla loro parte reale (deve essere $Re[p_i]<0$)

Stabilità asintotica di un Sistema LPPC <==> $Re[p_i]<0$

Caratteristiche della Funz. di Trasferimento

Un Σ è descritto (quasi*) completamente dalla sua funzione di trasferimento

$$G(S) = \frac{b_m\, s^m + \cdots + b_0}{a_n\, s^n + \cdots + a_0}$$

* salvo cancellazioni

L'analisi della $G(s)$ ci permette di determinare facilmente:

1. Stabilità asintotica: $R_e[p_i] < 0$

2. Velocità di convergenza: maggiore se $R_e[p_i]$ minore

3. Comportamento oscillatorio: $p_i = p^*_j$ complessi

4. Valore per $t \to \infty$ dell'uscita (regime): $\lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \cdot U(s)$

spesso $u(t) = \delta_{-1}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

PRECISAZIONI PER **Re[s]=0**

Stabilità asintotica se $R_e[p_i] < 0$

$$p_i < 0 \text{ polo semplice} \Rightarrow \lim_{t \to \infty} e^{p_i t} \to 0$$

$$p_i < 0 \text{ polo ad es. doppio} \Rightarrow \lim_{t \to \infty} t\, e^{p_i t} \to 0 \text{ comunque}$$

Cosa succede se $R_e[p_i] = 0$? Dalle espressioni precedenti,

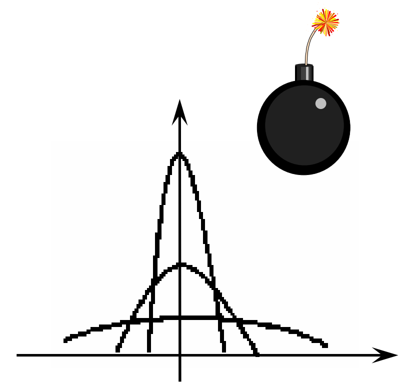
Se semplice,
l'evoluzione libera contiene una costante (stabile non asintoticamente)

Se multiplo,
contiene una rampa, una parabola, ecc. (instabile)

Per poli immaginari puri, si hanno sinusoidi (se poli semplici)
o divergenti polinomialmente (se poli multipli)

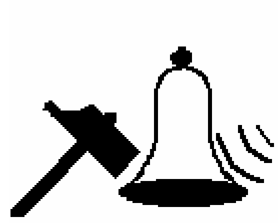
Cos'è l'antitrasformata di G(s) ?

$$\boxed{Y(s) = G(s) \cdot U(s)}$$ C.I.=0



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)dt = 1$$

Assumiamo U(s)=1 ➔ u(t)=δ(t) impulso



Y(s)=G(s) ·1

y(t)=g(t) Risposta Impulsiva

Ma anche (con la convoluzione) : $y(t) = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \delta(t)g(t-\tau)d\tau = g(t)$

Inoltre se: $u(t) = \delta_{-1}(t)$ $U(s) = \frac{1}{s}$ gradino

$Y(s) = \frac{G(s)}{s}$ $y(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau = g_{-1}(t)$ Risposta Indiciale

(integrale di quella impulsiva)

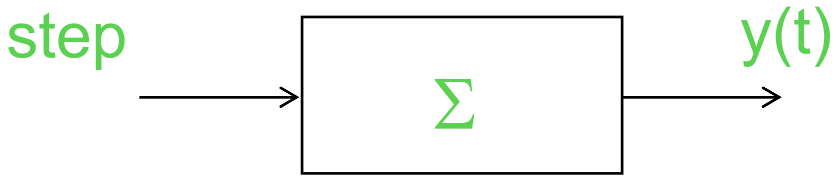
eq. diff. LPPC modello di un Σ: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(t)\right)+3\left(\frac{\partial}{\partial t}y(t)\right)+2\,y(t)=u(t)$

FdT: $F(s):=2\,\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

soluz. dell'omogenea: $y_o(t)=\_C1\,e^{(-2\,t)}+\_C2\,e^{(-t)}$

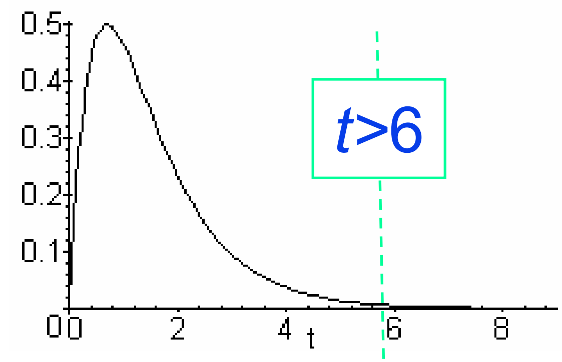
L^{-1}[F(s)]: $f(t):=2\,e^{(-t)}-2\,e^{(-2\,t)}$

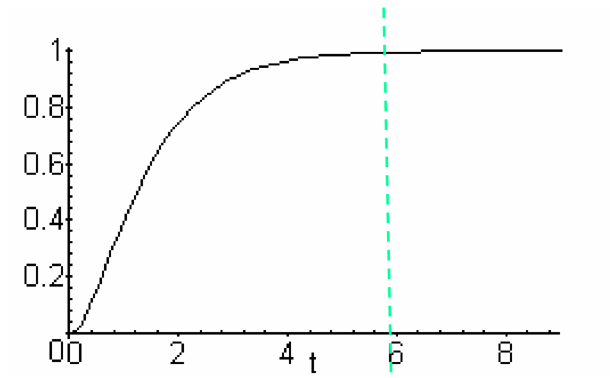
Risposta impulsiva =
una particolare soluz. dell'omogenea



y(t)=L^{-1}[F(s)/s],

$y(t):=1-2\,e^{(-t)}+e^{(-2\,t)}$



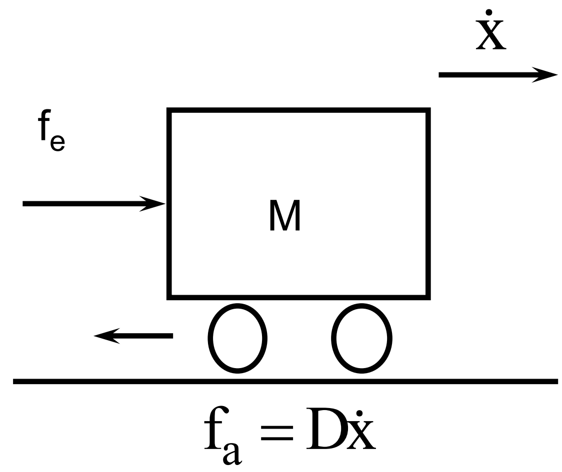


Risp. Transitoria Permanente

ingresso:

$$f_e = \delta_{-1}(t) \rightarrow F_e(s) = \frac{1}{s}$$

nullo per t<0 ➔ $CI_u = 0$, $CI_y = 1$



M=1
D=1

equazioni: $M\dot{v} = f_e(t) - Dv$

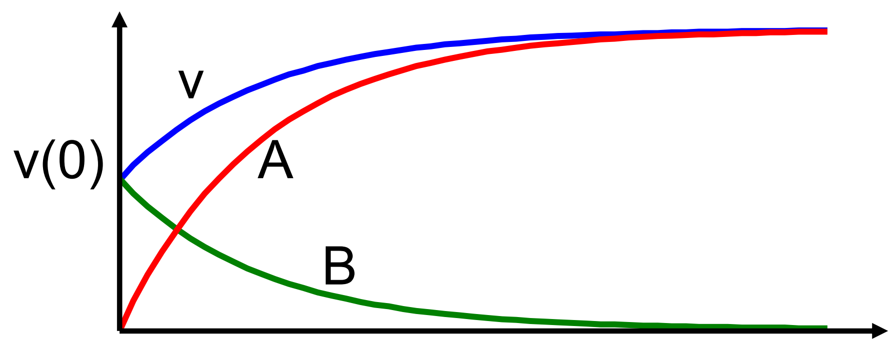
$$M\left[sV(s) - v(0)\right] = F_e(s) - DV(s)$$

Ma v(0)=0.5

$$V(s) = \frac{1}{Ms+D} \cdot F_e(s) + \frac{v(0)}{Ms+D} = \underbrace{\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}}_{A} + \underbrace{\frac{0.5}{s+1}}_{B}$$

A: risposta forzata,
ingresso+sistema
B: risposta libera,
solo sistema

Polo di G(s): -1
Polo della risp. libera: -1
Poli di V(s): -1, 0

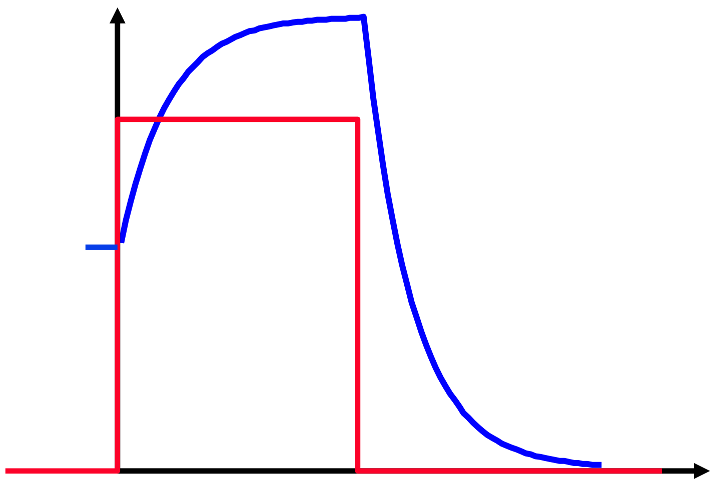


Dopo 5 secondi, la forza torna a 0

Possiamo studiare la risposta all'ingresso: $\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-5)$

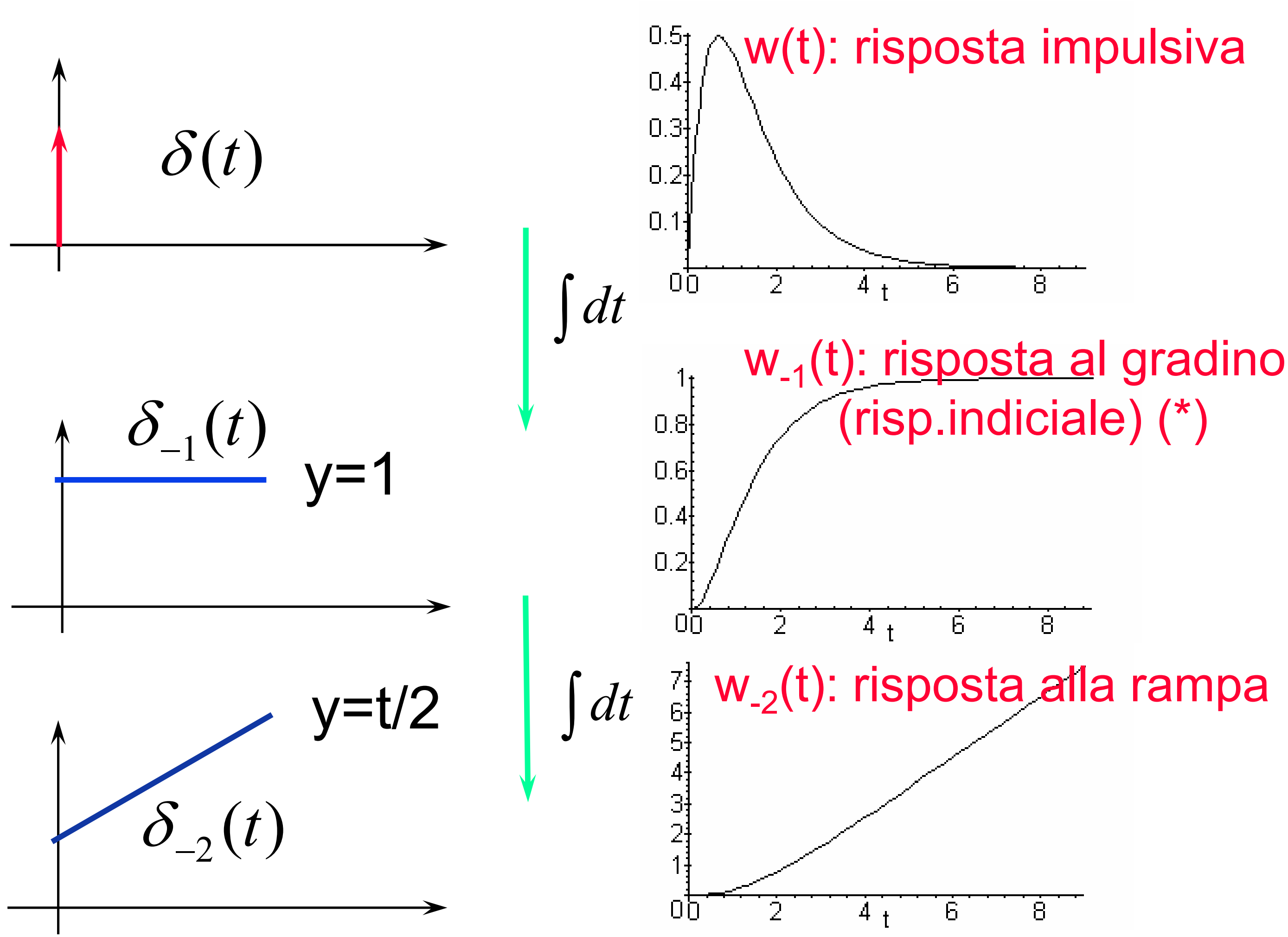
oppure considerare l'evoluzione libera da t=5

Si ottiene comunque:



Se u(t) torna a zero,
il sistema torna a riposo ➔
Stabilità Asintotica $\mathrm{Re}[p_i]<0$

1. La risposta impulsiva è di scarso interesse pratico (gli impulsi non esistono fisicamente), ma è importante, perché consente di vedere tutti e soli i modi del sistema
2. Le risposte canoniche (utili) si ricavano integrando quella impulsiva



E' sulla seconda (*) che si definiscono le specifiche di progetto nel dominio del tempo

Trasformata degli ingressi canonici:

$f(t)$	$\delta_0(t)$	$\delta_{-1}(t)$	$\delta_{-2}(t) = t$	$\delta_{-k}(t) = t^{k-1}/_{(k-1)!}$
$F(s)$	1	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^k$

integrali

Altri ingressi molto utili sono:

$$\sin(\omega t) \quad \text{e} \quad \cos(\omega t), \qquad \omega = \omega_1 \div \omega_2$$

$\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$	$e^{-\sigma t}\sin(\omega t)$	$e^{-\sigma t}\cos(\omega t)$
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$	$\dfrac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$

si utilizza $\quad L\left[e^{-\sigma t} f(t)\right] = F(s+\sigma)$