
SISTEMI A SEGNALI CAMPIONATI (2)

- La Z-trasformata
- Passaggio da $F(s)$ a $F(z)$
- Equazioni alle differenze
- Andamenti caratteristici della risposta impulsiva
- Mapping $S \rightarrow Z$
- Trasformazioni approssimate
- Metodi di sintesi
- Regolatore PID discreto
- Scelta del tempo di campionamento
- Controllore Dead-Beat
- Identificazione Parametrica

Analoga a quella di Laplace ma per segnali a tempo-discreto (equaz. alle differenze)

$$y^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y(i) \delta(t - iT_C) \quad Y^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} y(i) \cdot 1 \cdot e^{-siT_C}$$

Poniamo $z = e^{sT_C}$

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y(i) z^{-i}$$

Trasformata Z

- z^{-1} : operatore di ritardo elementare.

Si trasformano sia segnali che risposte impulsive.

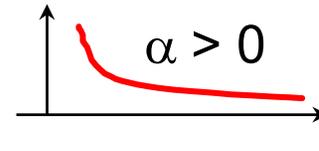
Considerando solo un tipo di segnale (l'impulso), possiamo specializzare la trasf. di Laplace

ALCUNE Z - TRASFORMATE

$$y(t) = e^{-\alpha t}$$

$$y(iT_c) = e^{-i\alpha T_c}$$

$$Y(z) = 1 + \left(ze^{\alpha T_c}\right)^{-1} + \left(ze^{\alpha T_c}\right)^{-2} + \dots$$


$$Y(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

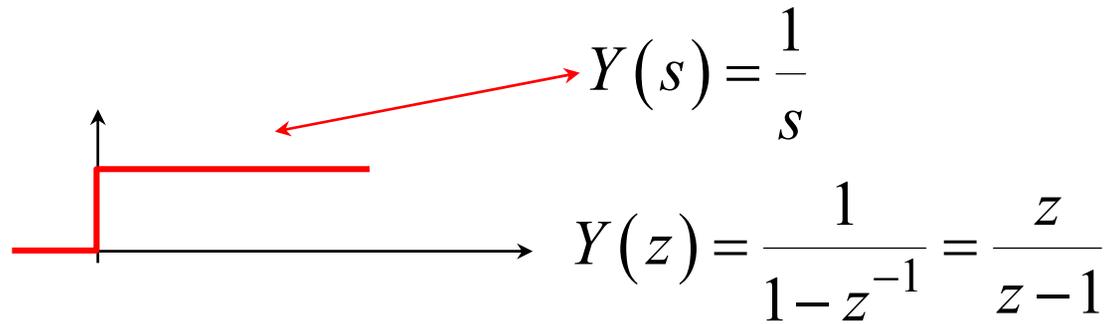
$$\sum_{i=0}^{\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$|x| > 1$$

Analogo
dell'ascissa di
convergenza

$$Y(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T_c} z^{-1}} = \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{z}{z - \beta}$$

Se $\alpha=0$



$$Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Se $\alpha=j\omega$ (2 poli)

$$y(t) = \sin \bar{\omega} t$$

$$Y(z) = \frac{\overbrace{\sin \bar{\omega} T_C \cdot z}^{\text{numeri}}}{z^2 \underbrace{-2 \cos \bar{\omega} T_C \cdot z + 1}_{\text{numeri}}}$$

DA F(S) A F(Z): METODO "ESATTO"

$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots}{(s - p_1)(s - p_2)\dots}$$


espansione in frazioni parziali (caso con poli semplici)

$$= \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \dots \rightarrow \frac{R_1}{1 - \beta_1 z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \beta_2 z^{-1}} + \dots \quad (\beta_i = e^{p_i T_C})$$

Sottinteso un passaggio nel dominio del tempo.

Il **numero di poli** resta invariato.

Vengono proiettati da S in Z come $z = e^{sT_C}$

Il **n° di zeri** cambia e vale N o N-1, in genere.

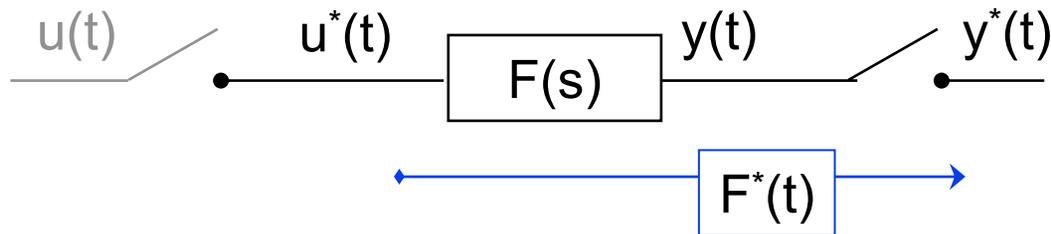
Osservazione Importante \bar{s} : complex $\bar{s} = \sigma + j\omega$

$$e^{[s + jk\omega_C]T_C} = e^{sT_C} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T_C} \cdot T_C} = e^{sT_C} \cdot e^{j2\pi k} = e^{sT_C}$$

Quindi il piano S risulta diviso in fasce orizzontali di altezza ω_C , tutte uguali fra di loro. Cfr. theo di Shannon

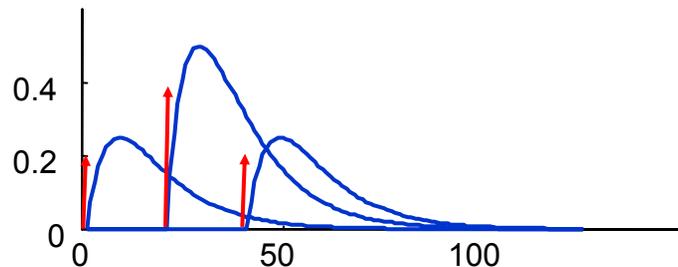
RISPOSTA A SEGNALI CAMPIONATI

Come risponde un sistema a tempo continuo ad un segnale campionato

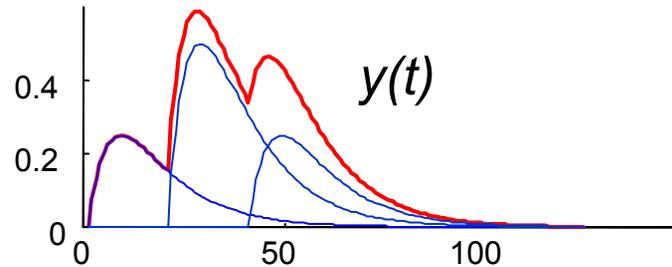


$F(s)$ può includere lo ZOH

$u^*(t)$: una successione di impulsi  $y(t)$: somma di risposte impulsive $f(t)$



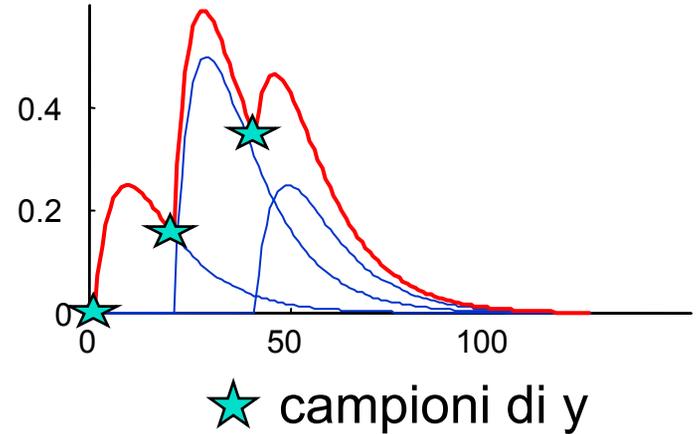
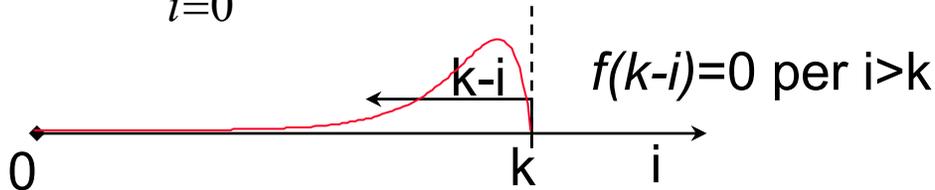
$$u^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i) \delta(t - iT_C)$$



$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f(t - iT_C) u(i)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f(t - iT_C) u(i)$$

$$y^*(\underline{k}) = \sum_{i=0}^{k/\infty} f[(\underline{k} - i)T_C] u(i) \delta(t - \underline{k}T_C)$$



L-trasformando e "con facili calcoli"

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) e^{-skT_C} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f[(k-i)T_C] u(i) \cdot e^{-skT_C} =$$

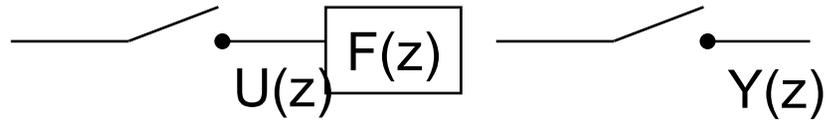
$$k=1+i, k-i=1 \quad = \sum_{l=0}^{\infty} f(l) e^{-slT_C} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} u(i) \cdot e^{-siT_C}$$

$$Y^*(s) = \underbrace{F^*(s)} \cdot \underbrace{U^*(s)}$$

$$Y(z) = F(z) U(z)$$

Tra le uscite dei due campionatori vale una relazione analoga alle usuali funzioni di trasferimento

DETERMINAZIONE DI F(z)



$$Y(z) = F(z) \cdot U(z)$$

$$X(z) = X^*(s) \Big|_{z=e^{sT_C}} = \sum X(i) e^{-isT_C} \Big|_{z=e^{sT_C}} \quad X = \{U, Y, F\}$$

$$F(z) \text{ si ottiene : } F(z) = \sum f(l) e^{-lsT_C}$$

- espandendo $F(s)$ in [frazioni parziali](#). $F(s) = \sum \frac{R_i}{s - p_i}$, $F(z) = \sum \frac{R_i}{1 - \beta_i z^{-i}}$
 Metodo “impulse invariant”, conserva i campioni della risp. impulsiva, ma non la $W(j\omega)$

- da [apposite tavole](#)
- con [sostituzioni approssimate](#)

impiegato per il progetto di filtri digitali

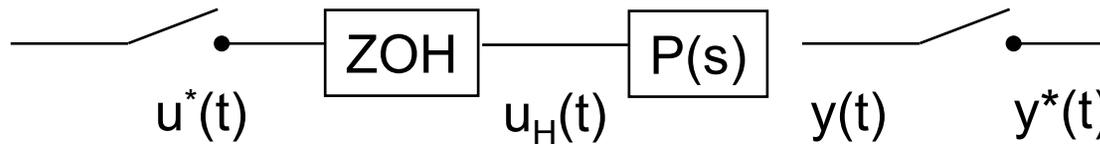
$$F(z) = F(s) \Big|_{s=Q(z)} \quad \text{e.g.}$$

$$s = \frac{2}{T_C} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \equiv$$

A diagram showing the mapping of the s-plane to the z-plane. A horizontal line represents the real axis in the s-plane, and a vertical line represents the imaginary axis. Two arrows point from the s-plane towards the z-plane, indicating the direction of the mapping.

- dalle [equazioni differenziali](#)

$$\frac{d}{dt} \cong \frac{\Delta}{\Delta t}$$

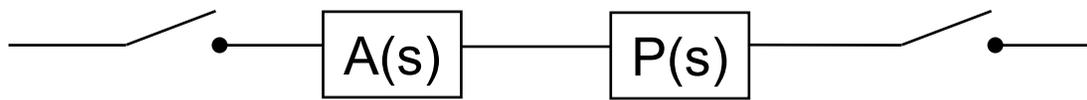


$$\begin{aligned}
 Y(z) &= Z[ZOH(s) \cdot P(s)] \cdot U(z) = Z\left[\frac{1 - e^{-sT_c}}{s} P(s)\right] \cdot U(z) = \\
 &= Z\left[\frac{P(s)}{s}\right] - Z\left[e^{-sT_c} \frac{P(s)}{s}\right] = \\
 &= (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{P(s)}{s}\right] \cdot U(z)
 \end{aligned}$$

questa si ottiene con
i metodi precedenti

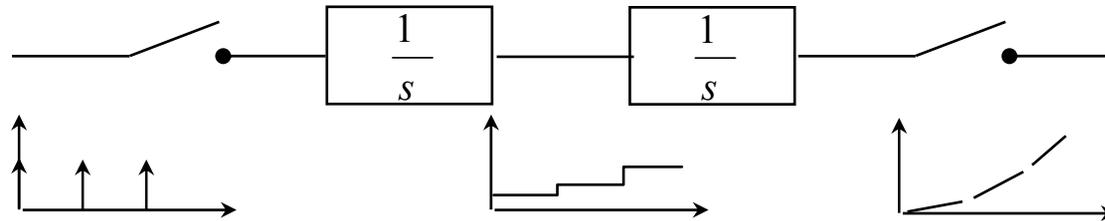
$$Z[A(s) + P(s)] = Z[A(s)] + Z[P(s)]$$

$$Z[A(s) \cdot P(s)] \neq Z[A(s)] \cdot Z[P(s)]$$

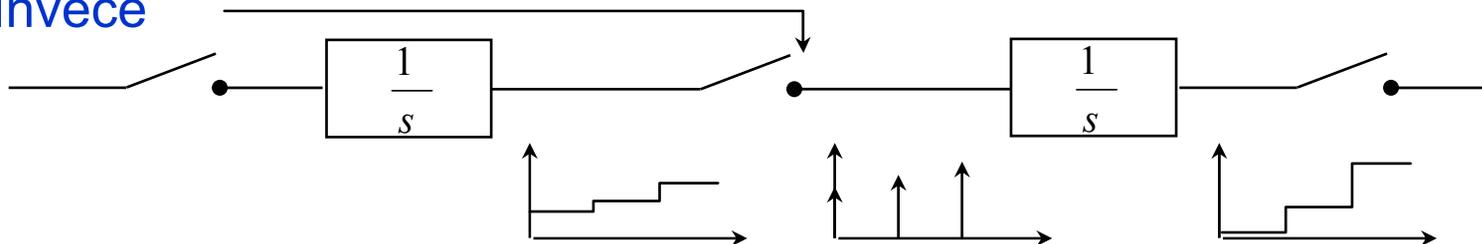


Occorre trasformare $A(s) \cdot P(s)$ insieme

Spiegazione intuitiva



Invece



- Causalità : dall'equazione alle differenze $y_k = a_1 y_{k-1} + \dots + b_0 u_k$

Poiché y_k deve dipendere al più da u_k , nel numeratore di $G(z)$ non ci possono essere potenze positive

- Valore finale

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y(i) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z)$$

$$y(z) = \cancel{y(0)} + z^{-1} \cancel{y(1)} + z^{-2} \cancel{y(2)} + \dots + z^{-i+1} \cancel{y(i-1)} + z^{-i} y(i)$$

$$z^{-1} y(z) = 0 + \cancel{z^{-1} y(0)} + \cancel{z^{-2} y(1)} + \cancel{z^{-3} y(2)} + \dots + \cancel{z^{-i} y(i-1)}$$

$$\underline{\hspace{10em}}$$

$$y(i) \quad i \rightarrow \infty$$

- Guadagno di una FdT : valore finale della risposta ad un gradino
(escluse le azioni integrali)

$$k = \lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - z^{-1}\right) \frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)} \frac{b_0 + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{\sum b_i}{\sum a_i}$$

- Azione integrale $\frac{1}{s} \equiv \frac{1}{1 - z^{-1}}$

$$G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} G'(z) \quad \text{un polo in } z = 1$$

- Ritardi puri

$$G(z) = z^{-d} G'(z) \quad d \text{ poli nell'origine}$$

Una FdT campionata (un sistema a t. discreto) equivale
a una equazione alle differenze.

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$Y(z) \left[1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m} \right] = U(z) \left[b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \right]$$


$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_m y_{k-m} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m}$$

Scriviamo ∞ equazioni $y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_m y_{k-m} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m}$

k=0, multipl. per e^{-0sT_c}

$$[y_0 + y_{-1}a_1 + \dots = u_0b_0 + \dots] \cdot e^{-0sT_c}$$

k=1, multipl. per e^{-1sT_c}

$$[y_1 + y_0a_1 + \dots = u_1b_0 + \dots] \cdot e^{-sT_c}$$

k=2, ...

$$[y_2 + y_1a_1 + \dots = u_2b_0 + \dots] \cdot e^{-2sT_c}$$

\equiv

generica

$$[y_k + y_{k-1}a_1 + \dots = u_kb_0 + \dots] \cdot e^{-ksT_c}$$

$\left. \vphantom{\begin{matrix} [y_0 + y_{-1}a_1 + \dots = u_0b_0 + \dots] \cdot e^{-0sT_c} \\ [y_1 + y_0a_1 + \dots = u_1b_0 + \dots] \cdot e^{-sT_c} \\ [y_2 + y_1a_1 + \dots = u_2b_0 + \dots] \cdot e^{-2sT_c} \\ \equiv \\ [y_k + y_{k-1}a_1 + \dots = u_kb_0 + \dots] \cdot e^{-ksT_c} \end{matrix}} \right\} \Sigma$

somma per colonna

$$\sum y(i)e^{-isT_c} + a_1 \sum y(i-1)e^{-isT_c} + \dots$$

raccogliere e^{-ksT_c}

$$a_1 e^{-sT_c} \sum y(i-1)e^{-(i-1)sT_c}$$

trasformare

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots$$

SOLUZIONE DELL'EQ. ALLE DIFFERENZE

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

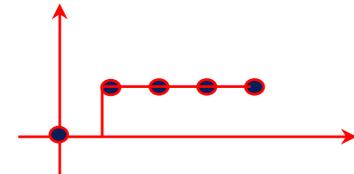
$$Y(z)(1 - 0.9z^{-1}) = z^{-1}U(z)$$

$$Y_{k+1} = 0.9Y_k + U_k$$

C.I. = $y_0 = 0$

input: $U_k = \{0, 1, 1, 1, \dots\}$

k =	y_k	u_k	y_{k+1}
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	1	1.9
3	1.9	1	2.8



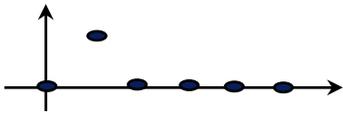
La risposta impulsiva si ha con quella al gradino con

$$U_k = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$$

$$U_k = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

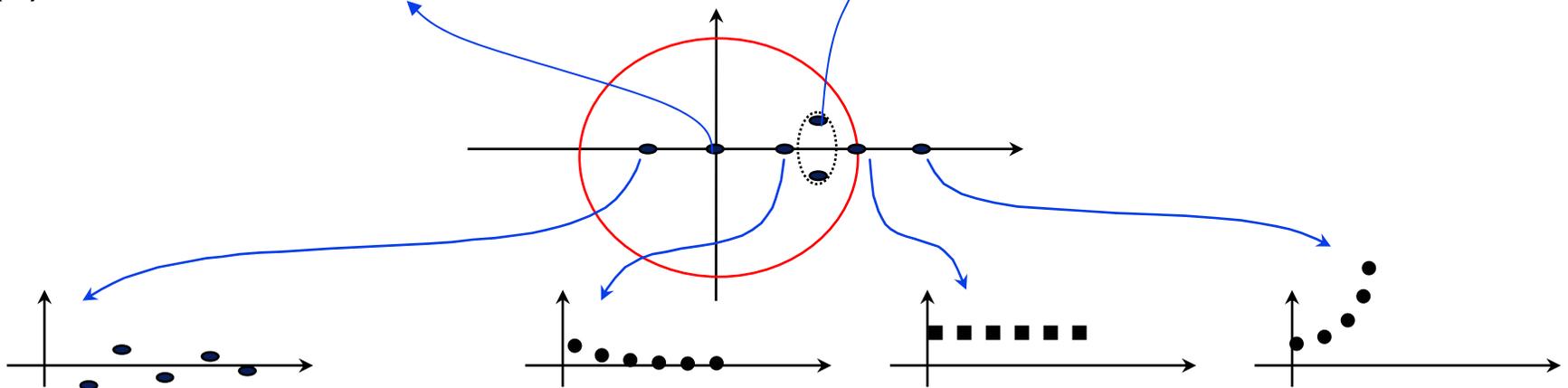
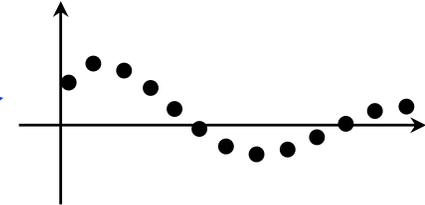
TIPICHE RISPOSTE IMPULSIVE

(**modi naturali** dei sistemi a tempo discreto)



ritardo

a tempo continuo richiede
 $F(s)$ trascendente



integratore

instabile

un **polo reale semplice**

non ha corrispettivo a tempo continuo

Invece un polo doppio sì.

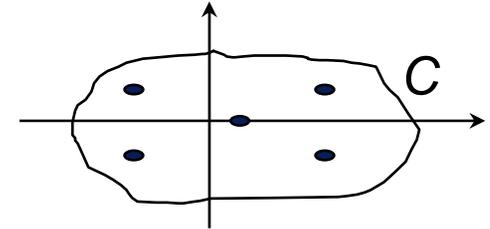
Si possono tutte ricavare come
risposte impulsive di semplici sistemi

INVERSIONE Z-TRASFORMATA

$$F(z) \rightarrow f(kT_c)$$

Per il theo. di Shannon
il passaggio a $f(t)$ non è univoco

$$f(kT_c) = \oint_C F(z) z^{k-1} dz$$



più pratico:

$$\sum f(kT_c) z^{-k} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$f_0 D(z) + f_1 z^{-1} D(z) + \dots = N(z)$$

uguagliando le potenze di z^{-k}

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 f_0 & f_0 &= \frac{b_0}{a_0} \\ b_1 &= a_0 f_1 + a_1 f_0 \\ b_2 &= a_0 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_0 \end{aligned}$$

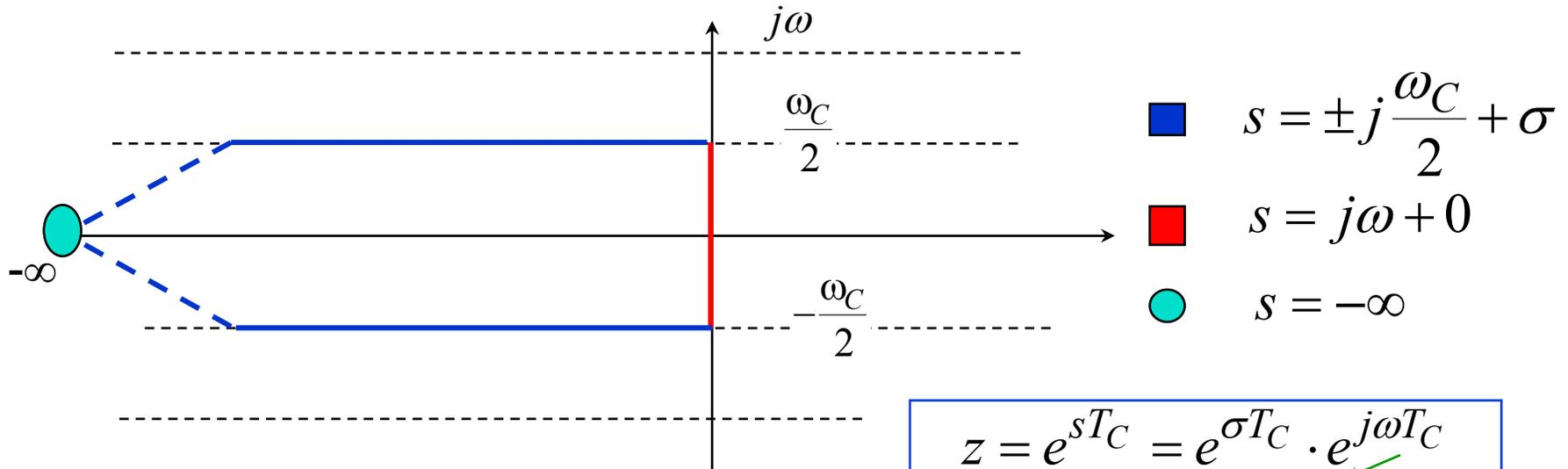
$f_1 = \dots$

Σ indici = # equazioni

Sistema triangolare si risolve subito.

Dà in sequenza tutti i campioni f_k .

MAPPING $S \rightarrow Z$



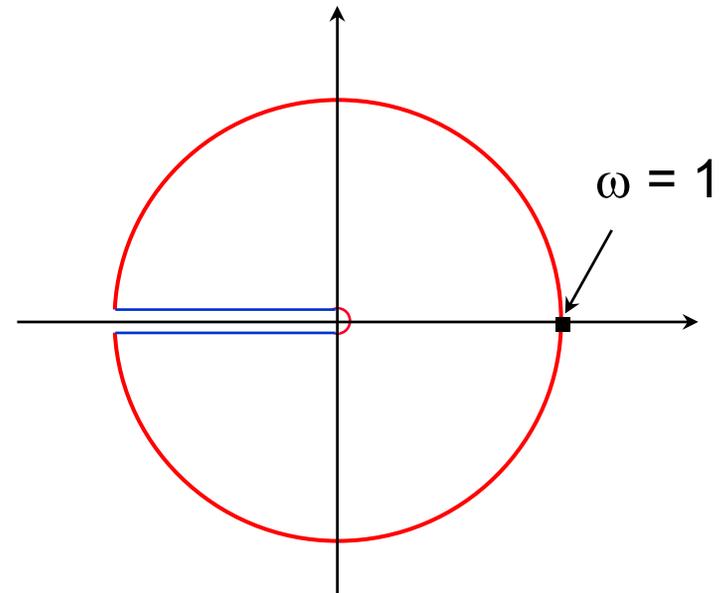
$$z = e^{sT_c} = e^{\sigma T_c} \cdot e^{j\omega T_c}$$

modulo \longleftarrow \longleftarrow angolo

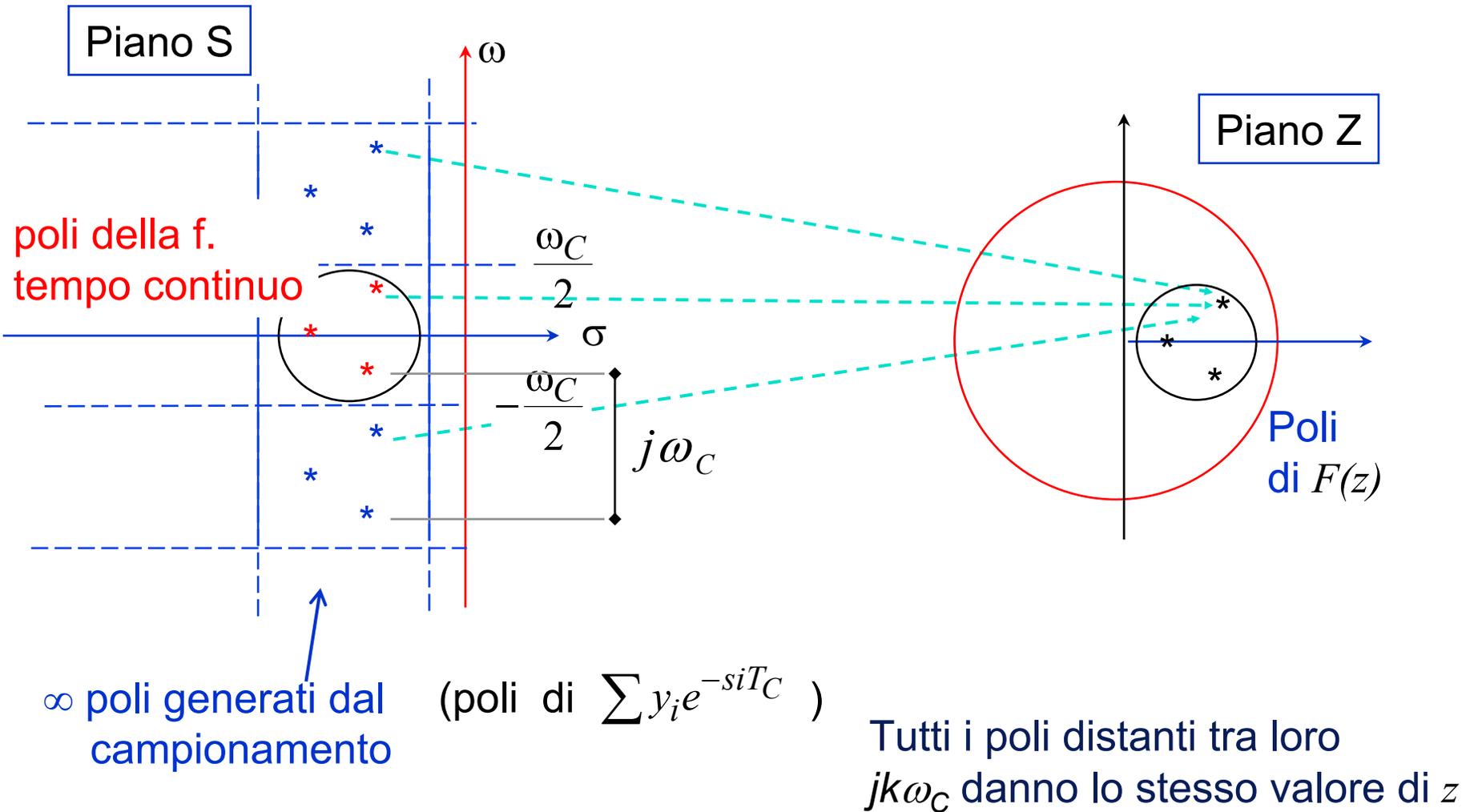
$$\blacksquare \quad z = e^{\sigma T_c} \cdot e^{\pm j \frac{\omega_C}{2} \frac{2\pi}{\omega_C} T_c} = e^{\sigma T_c} \cdot e^{\pm j\pi}$$

$$\blacksquare \quad z = 1 \cdot e^{j\omega T_c} = e^{j\omega \frac{2\pi}{\omega_C} T_c} = e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_C} T_c}$$

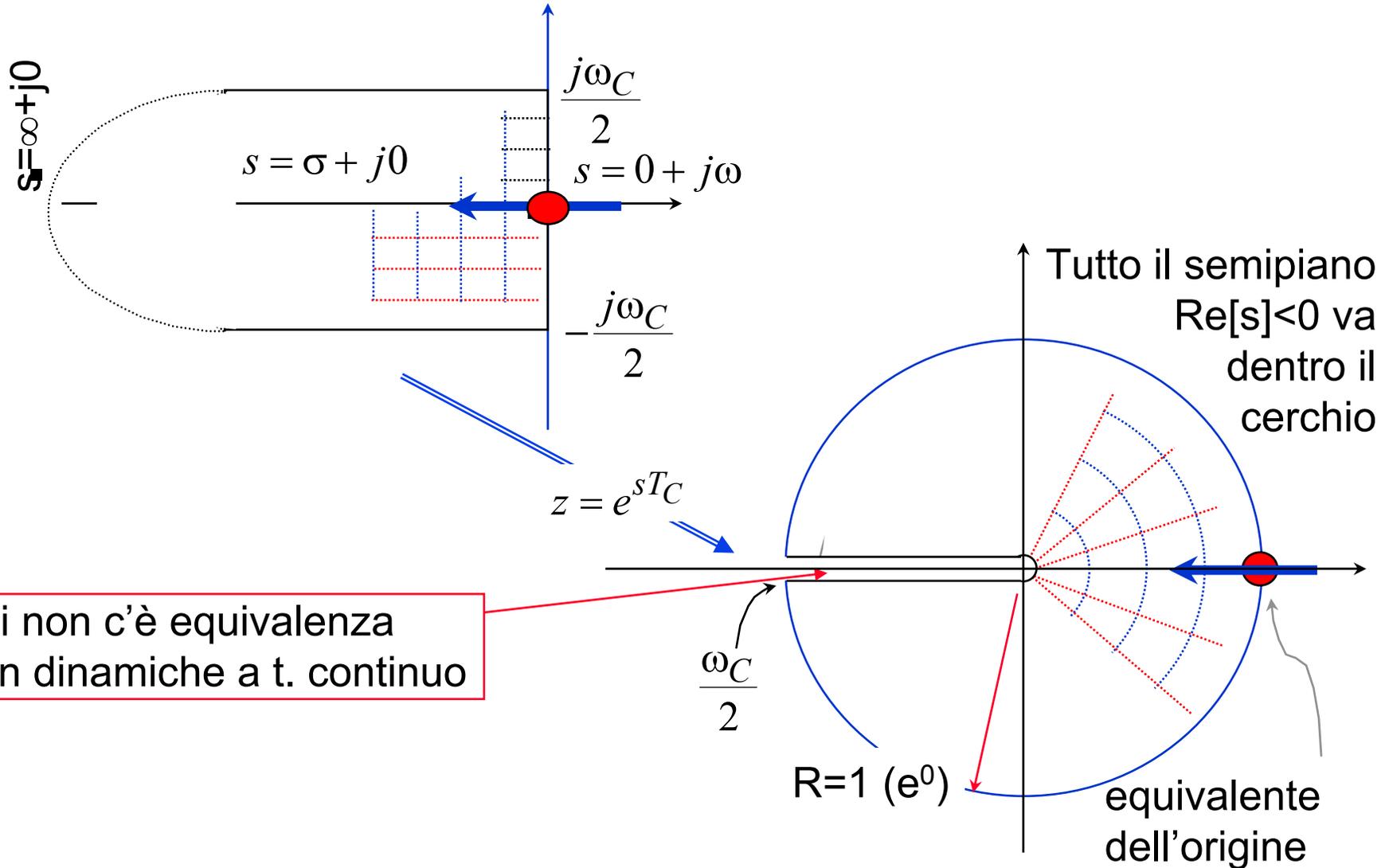
$$\bullet \quad z = e^{-\infty} = 0$$



MAPPING $S \rightarrow Z$ (2)



MAPPING $S \rightarrow Z$ (3)



I sistemi a tempo discreto **stabili** hanno i poli di $F(z)$ **dentro al cerchio di raggio unitario**

METODI DI TRASFORMAZIONE APPROX

Il metodo di trasformazione “esatto”:

- a) Conserva intatti i campioni della risposta impulsiva;
- b) Altera la risposta in frequenza
- c) E' scomodo

Esistono metodi più pratici che sfruttano il fatto che T_C è “piccolo”.

ad esempio
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

$y(t) \cong y(kT_C)$ **Per** $t \cong kT_C$ **e** T_C **piccolo**

$$\dot{y}(t) \cong \frac{y(kT_C) - y[(k-1)T_C]}{T_C} \qquad \ddot{y}(t) \cong \frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{T_C^2}$$

ovvero
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = u(t) \qquad \frac{y(k+1) - y(k)}{T_C} = u(k+1)$$

$$Y(z) \left[1 - z^{-1} \right] = T_C \cdot U(z) \qquad \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T_C}{1 - z^{-1}} \qquad s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T_C}$$

$$\frac{1}{s}$$

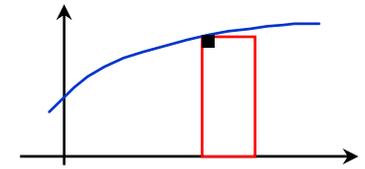
Rappresenta un'integrazione, può essere approssimato in più modi :

Forward integration

$$y_{k+1} = y_k + u_k T_C \quad Y(z) = [Y(z) + U(z)T_C]z^{-1}$$

$$Y(z) = \frac{T_C z^{-1}}{1 - z^{-1}} U(z)$$

$$s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T_C z^{-1}}$$

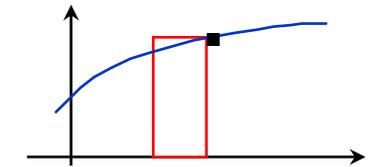


Backward integration

$$y_{k+1} = y_k + u_{k+1} T_C$$

$$Y(z) = \frac{T_C}{1 - z^{-1}} U(z)$$

$$s \cong \frac{1}{T_C} (1 - z^{-1})$$

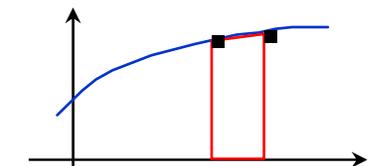


Bilineare o Tustin

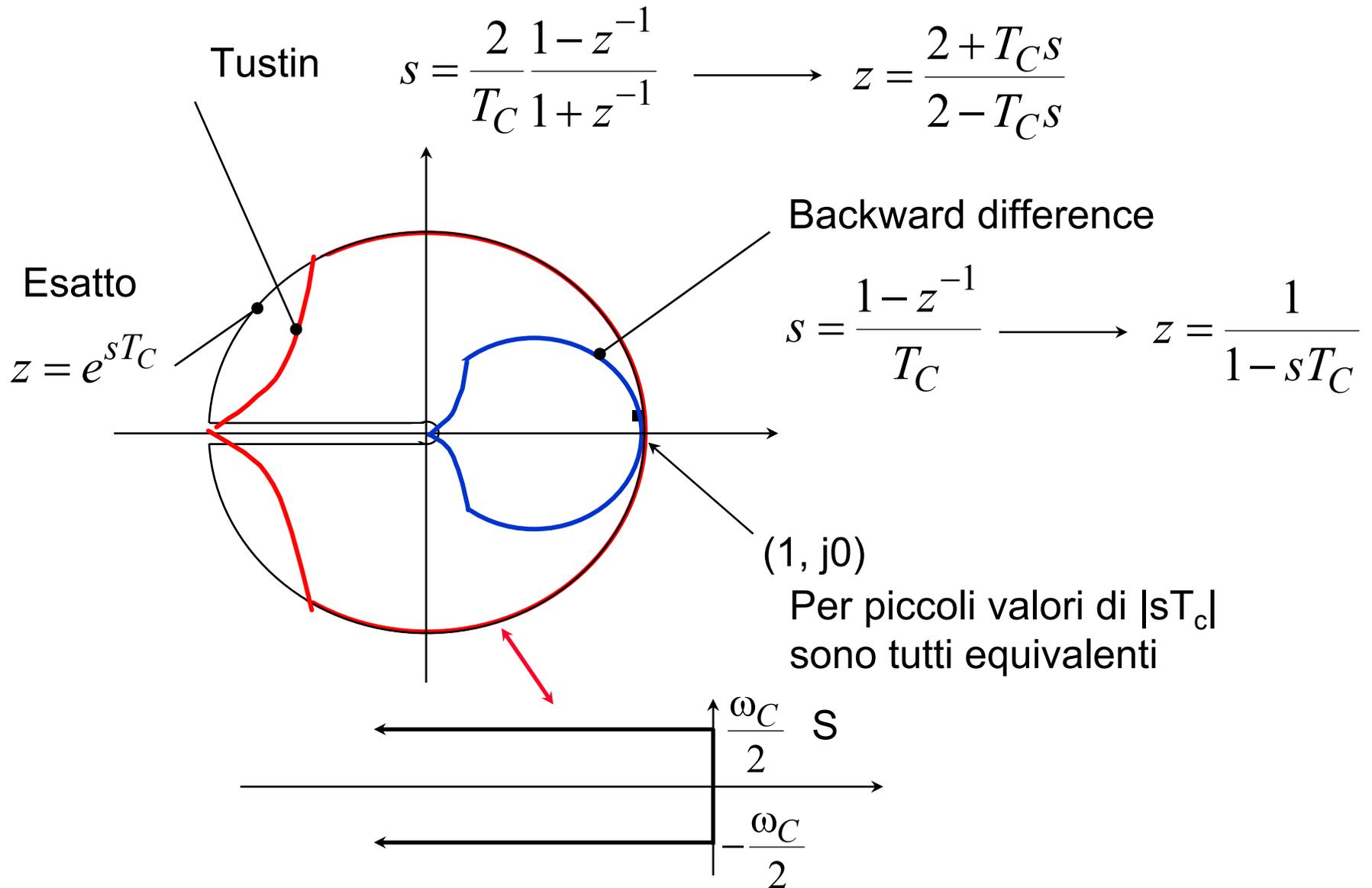
$$y_{k+1} = y_k + \frac{u_k + u_{k+1}}{2} T_C$$

$$Y(z) = \frac{T_C}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} U(z)$$

$$s \cong \frac{2}{T_C} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$



Sono tutte approssimazioni di $s = \frac{1}{T_C} \log(z)$

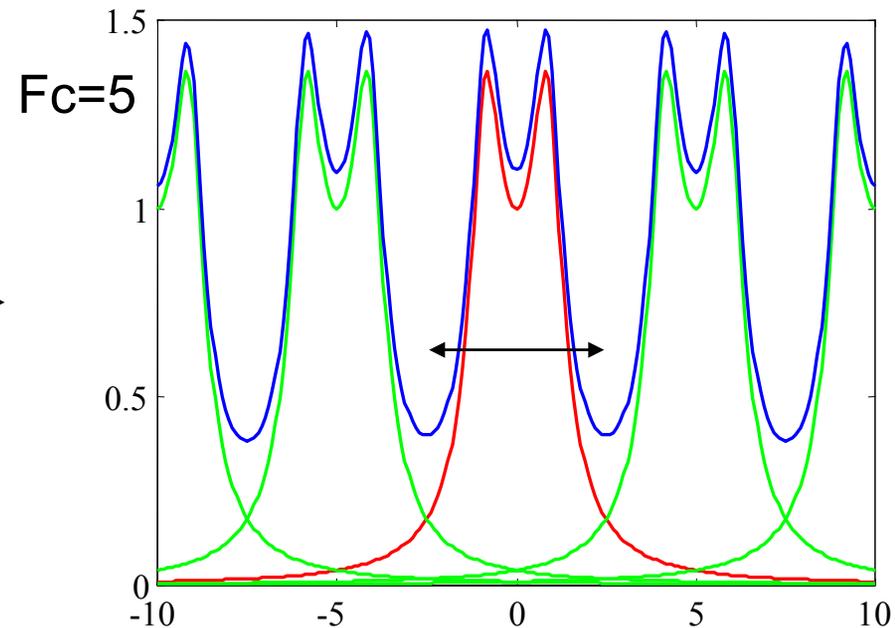
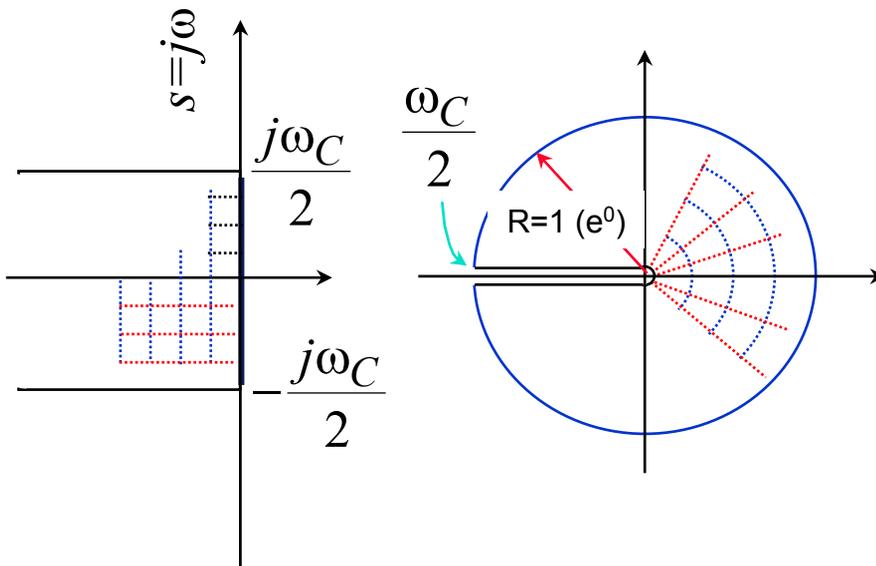


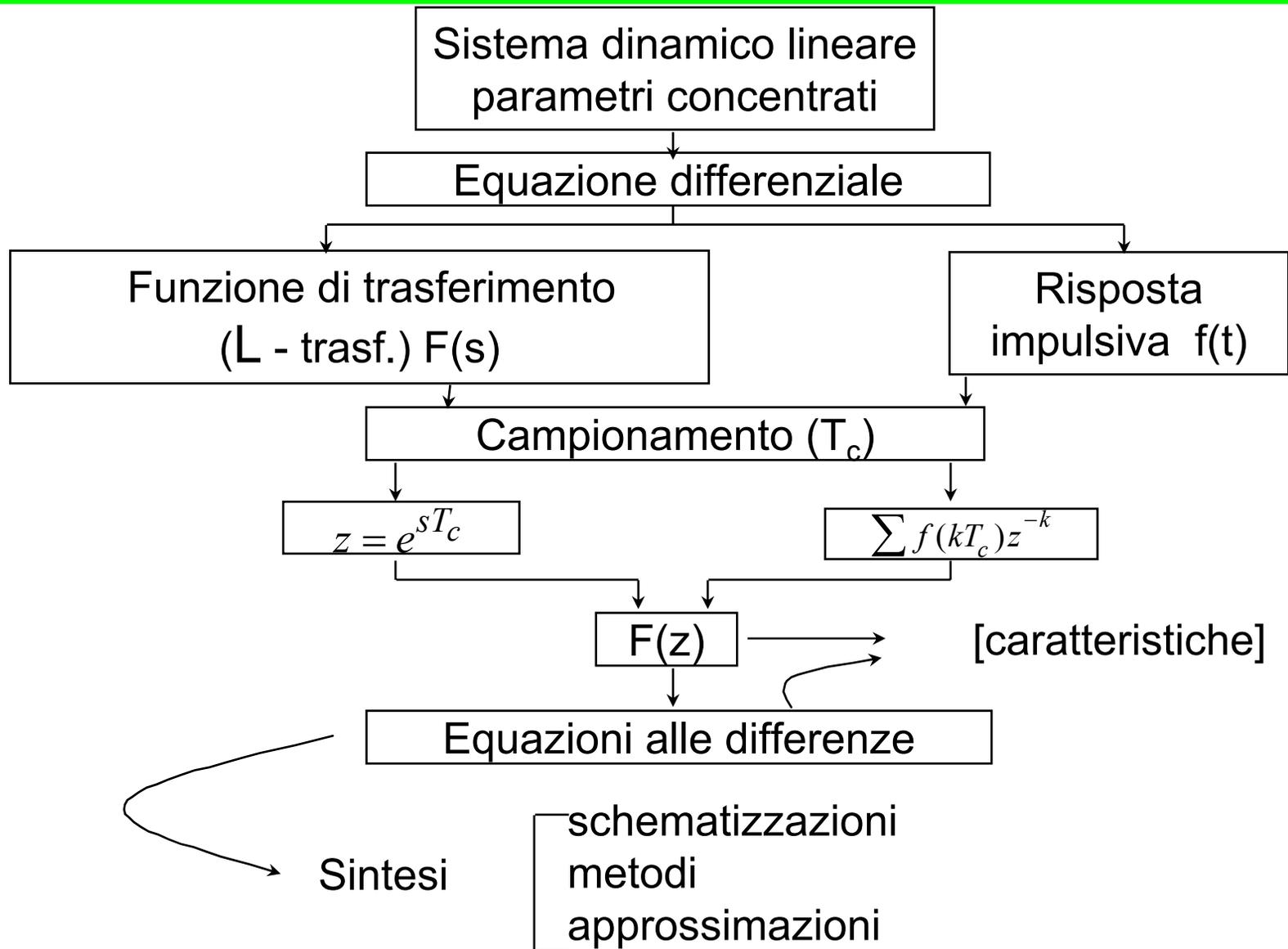
RISPOSTA IN FREQUENZA

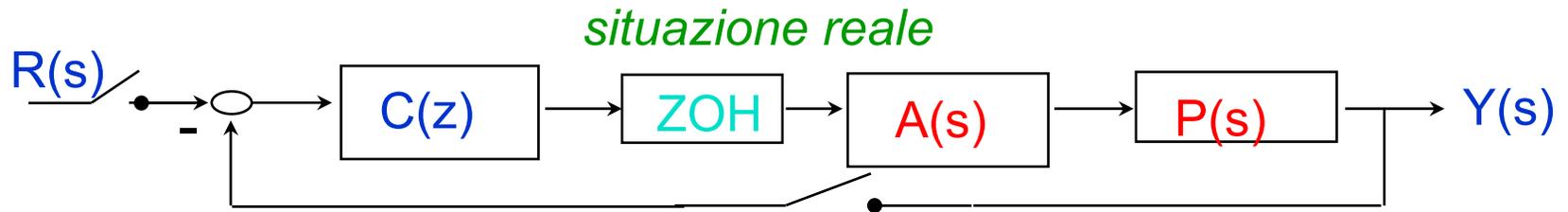
In Laplace la risposta in frequenza è $F(j\omega) = [F(s)]_{s=j\omega}$

in Z è $F(j\Omega) = [F(z)]_{|z|=1}$

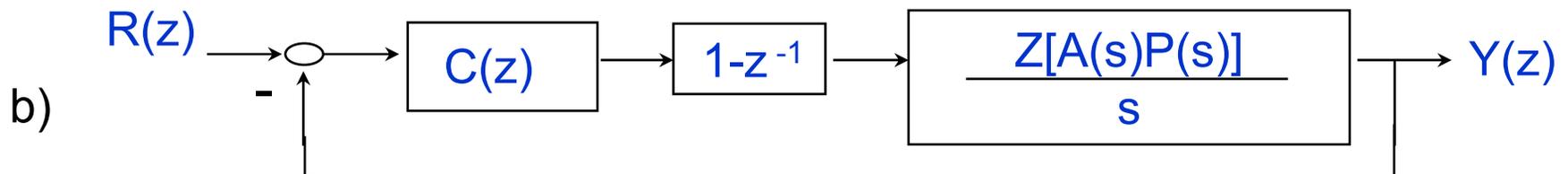
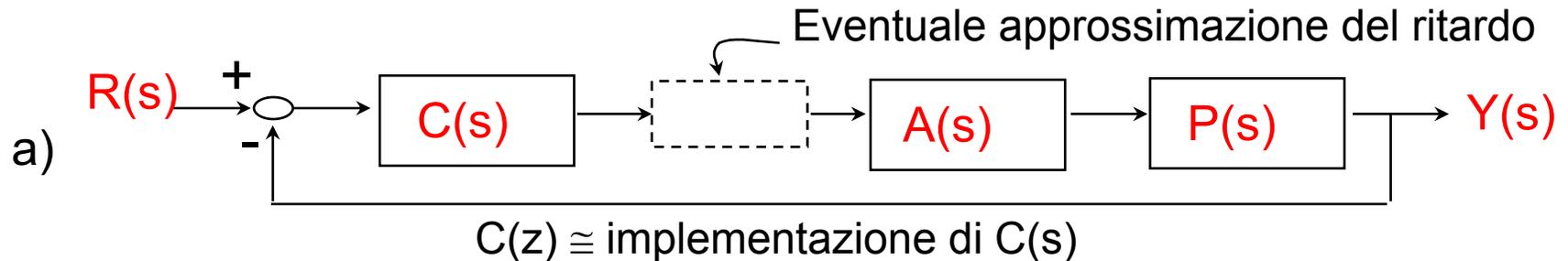
Infatti la retta $j\omega$ si mappa sulla circonferenza, compiendo infiniti giri
quindi la risposta armonica è somma di infinite risposte traslate di kF_C







- a) Trasposizione della sintesi nel t. continuo
- b) Sintesi direttamente nel t. discreto



a) Va bene con T_c “abbastanza piccoli”

b) Richiede specifiche “discretizzate”

Diversi trabocchetti nelle discretizzazioni del processo.

REGOLATORE PID DISCRETO

$$c(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) + k_D \frac{de}{dt}$$

*Un metodo abbastanza generale e utile:
le somme telescopiche*

$$c(i) = k_p e(i) + \frac{k_D}{T_c} [e(i) - e(i-1)] + \frac{T_c}{2} k_i \{ [e(0) + e(1)] + [e(1) + e(2)] + \dots + [e(i) + e(i-1)] \}$$

$$c(i+1) = k_p e(i+1) + \frac{k_D}{T_c} [e(i+1) - e(i)] + \frac{T_c}{2} k_i \{ [e(0) + e(1)] + [e(1) + e(2)] + \dots + [e(i) + e(i-1)] + [e(i+1) + e(i)] \}$$

$$\underbrace{c(i+1) - c(i)} = k_p [e(i+1) + e(i)] + \frac{k_D}{T_c} [e(i+1) - 2e(i) + e(i-1)] + \frac{T_c}{2} k_i [e(i+1) + e(i)]$$

$$c(i+1) = c(i) + \Delta = c(i) + a_1 e(i+1) + a_2 e(i) + a_3 e(i-1)$$

{inizializzazione}

E1:=0 ; E2:=0 ; C0:=0

{ciclo di controllo}

REPEAT

* INP_ANALG(E0);

C1:=0 + A1*E0 + A2*E1 + A3*E2;

* OUT_ANALG(C1);

C0:=C1;

E2:=E1 ; E1:=E0 ;

E2 si perde e viene rimpiazzata

* WAIT (TC);

UNTIL FALSE {FOREVER} ;

* istruzioni "insolite"

WAIT(TC) : aspetta TC secondi dall'ultima chiamata.

INP _ANALG : chiamano i convertitori A/D e D/A.
OUT

Operazione critica. Scelta tipica: $f_c \geq 10B_{-3db}$

una scelta comune è una frequenza di campionamento pari a 10 la banda passante a ciclo chiuso del sistema.

Se è possibile è meglio che sia un po' più alta (20 ÷ 30 B_{-3db}), specie se non si hanno elevati margini di fase.

Altro modo di scegliere Tc

(o verificare la scelta precedente):

- Eseguire il progetto sui diagrammi di Bode
- Scegliere Tc in modo che introduzione dello ZOH sia compatibile con il margine di fase (impiegarne un modello approssimato a t. continuo)

Attenzione però un T_c troppo piccolo
provoca inconvenienti con le derivate,
specie con parole di memoria di lunghezza ridotta.

esempio

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{y_k - y_{k-1}}{T_c}$$

$$y(t) = 0.1t$$

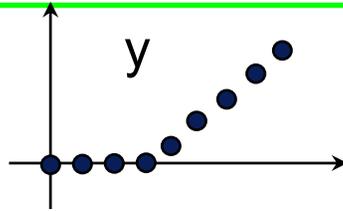
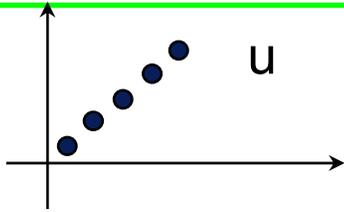
$$T_c = 0.1 \quad y(100) - y(99.9) = 10.00 - 9.99$$

$$T_c = 0.01 \quad y(100) - y(99.99) = 10.000 - 9.999$$

e ciò è vero anche in floating-point.

REM: i convertitori lavorano in virgola fissa

CONTROLLO DEAD - BEAT

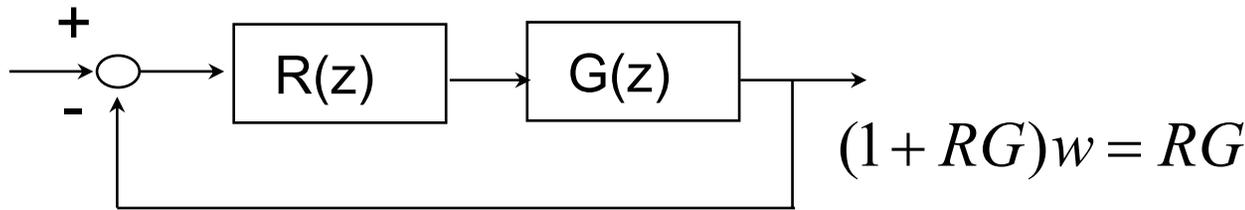


Riproduzione **esatta**, anche se ritardata

$$y(k) = u(k - n)$$

$$w(z) = z^{-n}$$

$$n = \min = ?$$



$$w = \frac{RG}{1 + RG}$$

$$R = \frac{w}{1 - w} \cdot \frac{1}{G}$$

Importante: zeri e poli di $G(z)$ stabili

$$w = z^{-n} \quad R = \frac{1}{z^n + 1} \frac{D_G}{N_G}$$

se $G(t)$ causale, $1/G$ non lo è

$$\text{grado numeratore } R(z) = g[N_R] = g[D_G]$$

$$\text{grado denominatore } R(z) = g[D_R] = n + g[N_G]$$

$$g[D_R] = g[N_R] \rightarrow n = g[D_G] - g[N_G]$$

n : min

IDENTIFICAZIONE DEI PARAMETRI

Sistema : equazione delle differenze

$$y(i) = -a_1 y(i-1) - \dots - a_n y(i-n) + b_0 u(i) + \dots + b_n y(i-m)$$

parametri

$$\mathcal{G} = [-a_1 \ \dots \ -a_n, b_0 \ \dots \ b_n]^T \quad n^\circ = 2n+1$$

misure all'istante i

$$q_i = [y(i-1) \ \dots \ y(i-n), u(i) \ \dots \ u(i-n)]^T$$

$$y(i) = q_i^T \cdot \mathcal{G}$$

Preleviamo le misure q_i per $i = 0 \div 2n$

$$y(0) = q_0^T \cdot \mathcal{G}$$

$$y(1) = q_1^T \cdot \mathcal{G}$$

\vdots

$$y(2n) = q_{2n}^T \cdot \mathcal{G}$$



$$\vec{y} = Q \cdot \mathcal{G}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -q_0^T & - \\ -q_1^T & - \\ \vdots & \vdots \\ -q_{2n}^T & - \end{bmatrix} \begin{matrix} (2n+1) \\ \times \\ (2n+1) \end{matrix}$$

Se $|Q| \neq 0$ (dipende dall'eccitazione di S) $\exists Q^{-1}$

$$\mathcal{G} = Q^{-1} \cdot \vec{y}$$

Se c'è **rumore sulle misure** ?

Si usano
i **minimi quadrati**

$$\begin{cases} y_k = -y_{k-1}a_1 - y_{k-2}a_2 + \dots + u_k b_k + u_k b_{k-1} + \dots + \varepsilon_k \\ \vdots \\ y_{k+M} = -y_{k+M-1}a_1 - \dots + \dots + \varepsilon_{k+M} \end{cases}$$

$$y = Q\mathcal{G} + \varepsilon$$

cerchiamo $\hat{\mathcal{G}} : \sum \varepsilon_i^2 = \min$

$$\varepsilon = y - Q\mathcal{G} \quad \sum \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \cdot \varepsilon = (y - Q\mathcal{G})^T (y - Q\mathcal{G})$$

derivando e uguagliando a zero

$$\hat{\mathcal{G}} = \underbrace{(Q^T Q)^{-1}}_{\text{pseudo inversa di } Q} Q^T y$$

pseudo inversa di Q