

Esercizi di Informatica Teorica

Linguaggi non contestuali: automi a pila

a cura di

Luca Cabibbo e Walter Didimo

Sommario

- automi a pila
- automi a pila e grammatiche non contestuali

notazioni sul livello degli esercizi: (*) facile, (**) non difficile
(***) media complessità, (****) difficile, (*****) quasi impossibile

Automa a pila (PDA)

automa a pila non deterministico (PDA) :

$A = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta \rangle$ dove

- Σ è l'alfabeto (finito) di input
 - Γ è l'alfabeto (finito) dei simboli della pila
 - Z_0 è il simbolo di pila iniziale
 - Q è un insieme (finito e non vuoto) di stati
 - $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
 - $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali
 - $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathbf{P}(Q \times \Gamma^*)$ è la funzione di transizione;
- la transizione $\delta(q, a, A) \rightarrow \langle q', \gamma \rangle$ indica che: dallo stato q , leggendo 'a' (che può anche essere ε) dalla stringa di input e 'A' come elemento affiorante dalla pila, si passa allo stato q' e si inserisce γ al posto di A in pila

Configurazioni e transizioni

- un automa a pila è deterministico se per ogni stato q , simbolo di input 'a' e simbolo di pila 'A', riesce: $|\delta(q, a, A)| + |\delta(q, \varepsilon, A)| \leq 1$
- configurazione (istantanea): $\langle q, x, \gamma \rangle$, dove
 - q è lo stato corrente
 - x è la stringa di input ancora da leggere
 - γ è la stringa ancora presente in pila (il primo simbolo di γ è quello affiorante dalla pila)
- transizione tra configurazioni: $\langle q, x, \gamma \rangle \vdash \langle q', x', \gamma' \rangle \Leftrightarrow$
 - $x = ax', \gamma = A\alpha, \gamma' = \beta\alpha, \langle q', \beta \rangle \in \delta(q, a, A)$ oppure
 - $x = x', \gamma = A\alpha, \gamma' = \beta\alpha, \langle q', \beta \rangle \in \delta(q, \varepsilon, A)$
- computazione: chiusura transitiva e riflessiva \vdash^* di \vdash

Linguaggio riconosciuto da un PDA

definizioni di accettazione:

- accettazione per pila vuota: una stringa x è accettata da un PDA \Leftrightarrow al termine della computazione su x la pila è vuota
- accettazione per stato finale: una stringa x è accettata da un PDA \Leftrightarrow al termine della computazione su x il PDA è su uno stato finale

linguaggio riconosciuto da un PDA: insieme delle stringhe accettate dal PDA

teorema: i linguaggi riconosciuti dai PDA che accettano per pila vuota sono tutti e soli i linguaggi riconosciuti dai PDA che accettano per stato finale (equivalenza dei linguaggi nelle due definizioni)

Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 1(**) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$.

Soluzione

- accettazione per pila vuota

$\Sigma = \{a,b\}$, $\Gamma = \{Z, A\}$, $Z_0 = Z$, $Q = \{q_0, q_1\}$

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, A>\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$ $\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$



Esercizi svolti sui PDA

computazione sulla stringa “aaabbb”

$\langle q_0, aaabbb, Z \rangle \vdash \langle q_0, aabbb, A \rangle \vdash \langle q_0, abbb, AA \rangle \vdash$
 $\langle q_0, bbb, AAA \rangle \vdash \langle q_1, bb, AA \rangle \vdash \langle q_1, b, A \rangle \vdash \langle q_1, \varepsilon, \varepsilon \rangle$

- accettazione per stato finale

$\Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{Z, A\}, Z_0 = Z, Q = \{q_0, q_1, q_F\}, F = \{q_F\}$

$\delta(q_0, a, Z) = \{\langle q_0, AZ \rangle\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{\langle q_0, AA \rangle\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{\langle q_1, \varepsilon \rangle\}$

$\delta(q_1, b, A) = \{\langle q_1, \varepsilon \rangle\}$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{\langle q_F, Z \rangle\}$

domanda: come si può modificare l'automa affinché accetti contemporaneamente per pila vuota e per stato finale?

Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 2(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^{2n} : n \geq 1\}$.

Soluzione

- accettazione per pila vuota

$$\delta(q_0, a, Z) = \{ \langle q_0, AA \rangle \} \quad \delta(q_0, a, A) = \{ \langle q_0, AAA \rangle \}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{ \langle q_1, \varepsilon \rangle \} \quad \delta(q_1, b, A) = \{ \langle q_1, \varepsilon \rangle \}$$



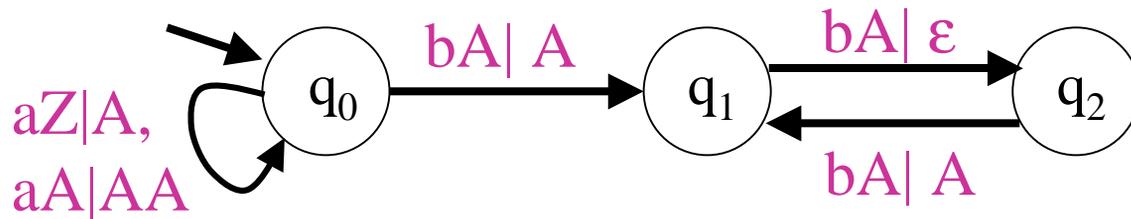
Esercizi svolti sui PDA

soluzione alternativa con accettazione per pila vuota

$$\delta(q_0, a, Z) = \{ \langle q_0, A \rangle \} \quad \delta(q_0, a, A) = \{ \langle q_0, AA \rangle \}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{ \langle q_1, A \rangle \} \quad \delta(q_1, b, A) = \{ \langle q_2, \varepsilon \rangle \}$$

$$\delta(q_2, b, A) = \{ \langle q_1, A \rangle \}$$



Esercizio 3(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{ a^n b^m : m \geq n \geq 1 \}$.

Esercizi svolti sui PDA

Soluzione

- accettazione per pila vuota (e stato finale)

$$\delta(q_0, a, Z) = \{ \langle q_0, AZ \rangle \}$$

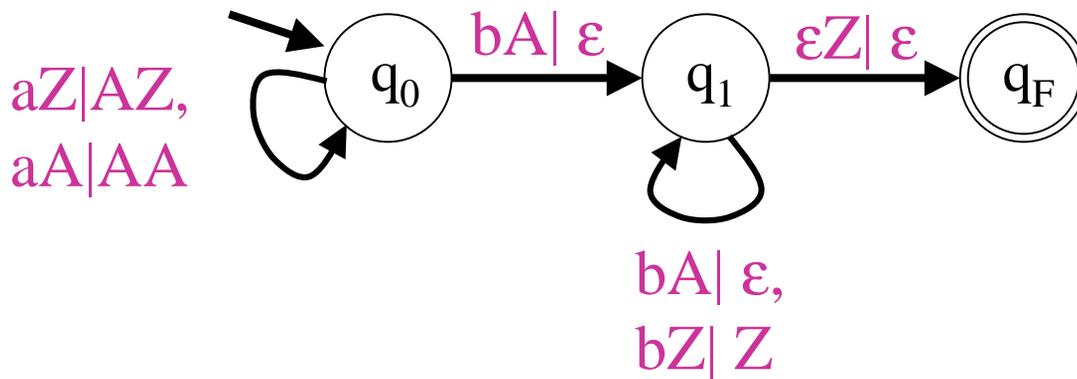
$$\delta(q_0, a, A) = \{ \langle q_0, AA \rangle \}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{ \langle q_1, \varepsilon \rangle \}$$

$$\delta(q_1, b, A) = \{ \langle q_1, \varepsilon \rangle \}$$

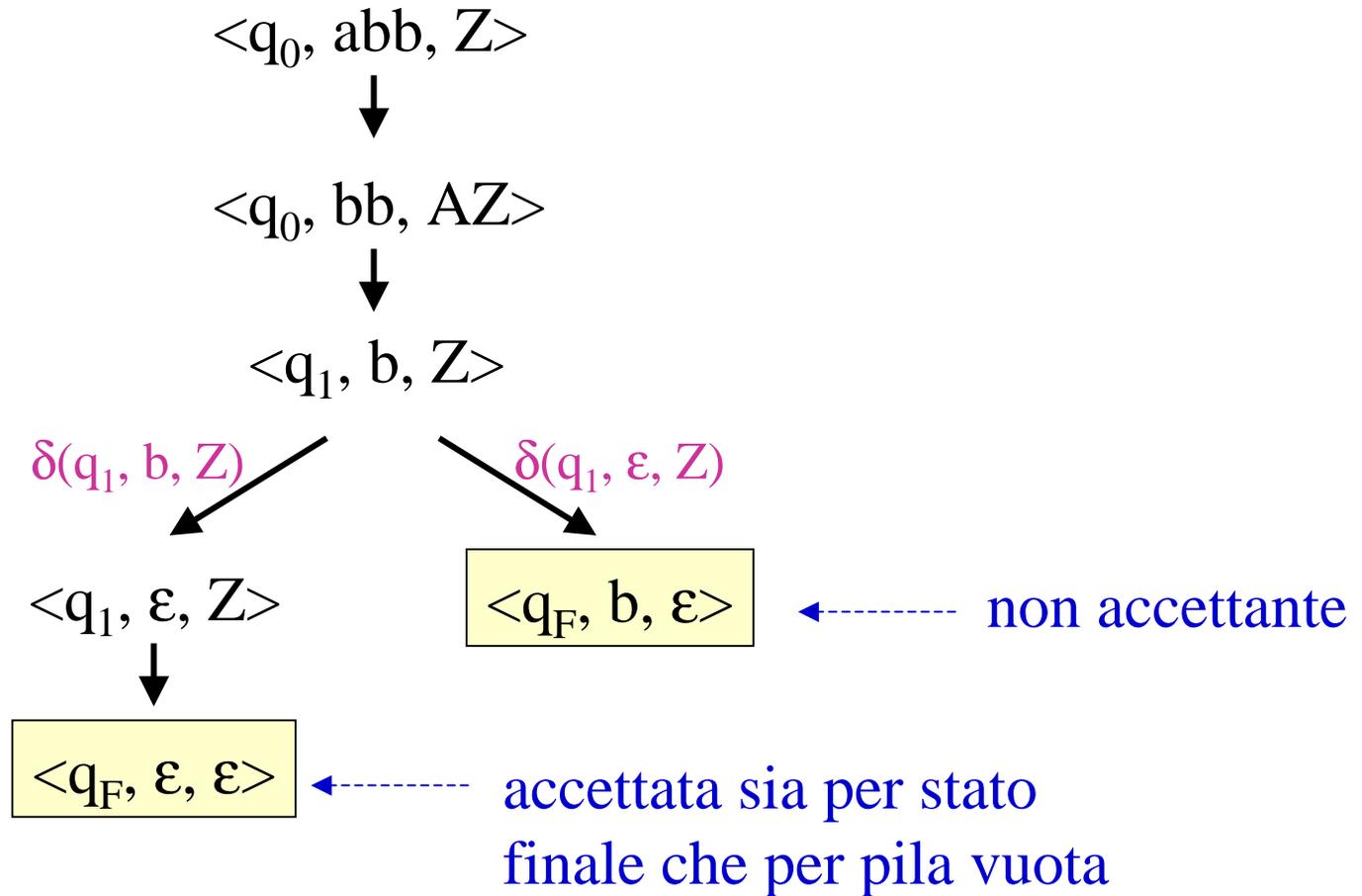
$$\delta(q_1, b, Z) = \{ \langle q_1, Z \rangle \}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{ \langle q_F, \varepsilon \rangle \}$$



Esercizi svolti sui PDA

albero di computazione per la stringa "abb"



Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 4(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^m : n \geq m \geq 1\}$.

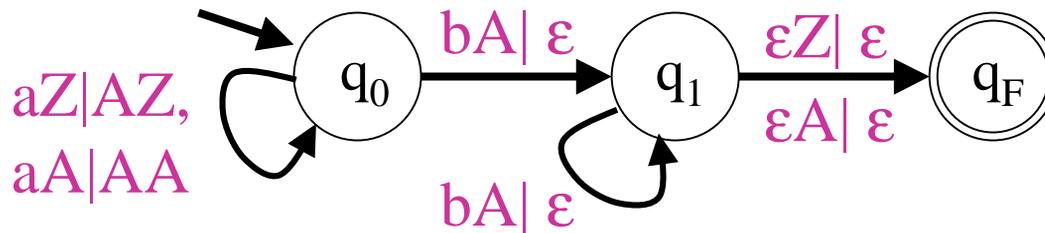
Soluzione

- accettazione per stato finale

$$\delta(q_0, a, Z) = \{\langle q_0, AZ \rangle\} \quad \delta(q_0, a, A) = \{\langle q_0, AA \rangle\}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{\langle q_1, \varepsilon \rangle\} \quad \delta(q_1, b, A) = \{\langle q_1, \varepsilon \rangle\}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{\langle q_F, \varepsilon \rangle\} \quad \delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{\langle q_F, \varepsilon \rangle\}$$



Esercizi svolti sui PDA

- accettazione per pila vuota

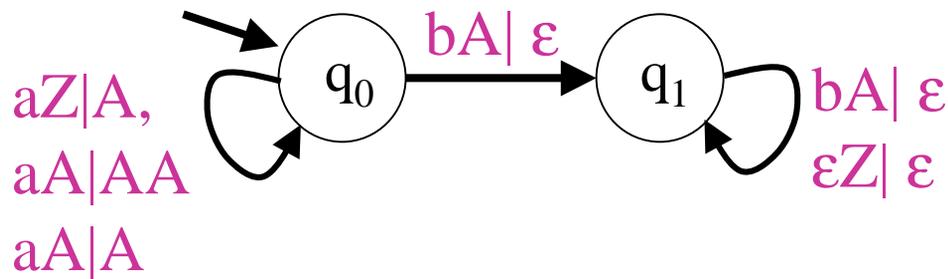
$$\delta(q_0, a, Z) = \{ \langle q_0, AZ \rangle \}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{ \langle q_0, AA \rangle, \langle q_0, A \rangle \}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{ \langle q_1, \varepsilon \rangle \}$$

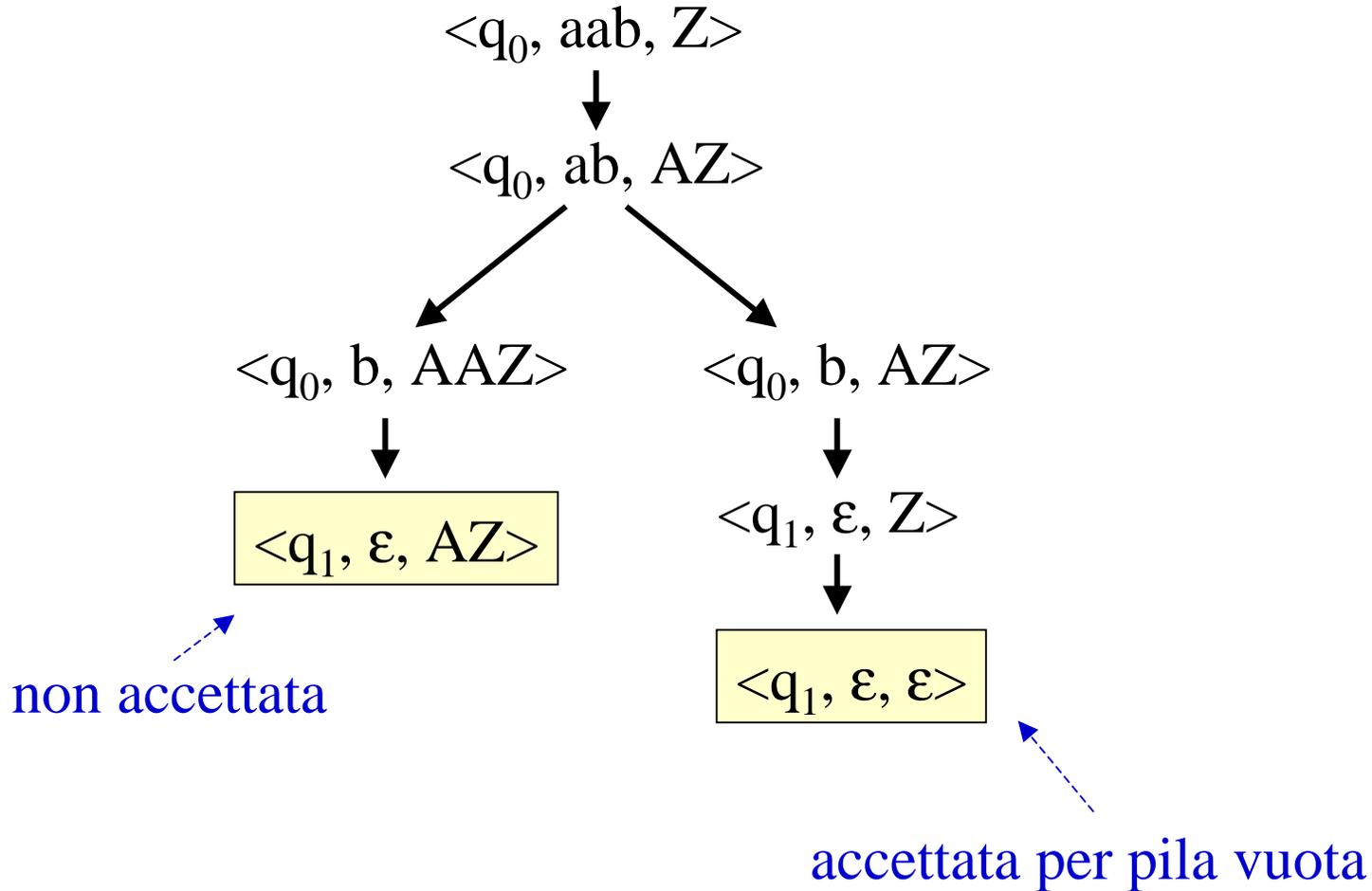
$$\delta(q_1, b, A) = \{ \langle q_1, \varepsilon \rangle \}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{ \langle q_1, \varepsilon \rangle \}$$



Esercizi svolti sui PDA

albero di computazione per la stringa "aab"



Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 5(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^m c^k : n, m, k \geq 1 \text{ ed } n=m \text{ o } n=k\}$.

Soluzione

- accettazione per pila vuota e stato finale

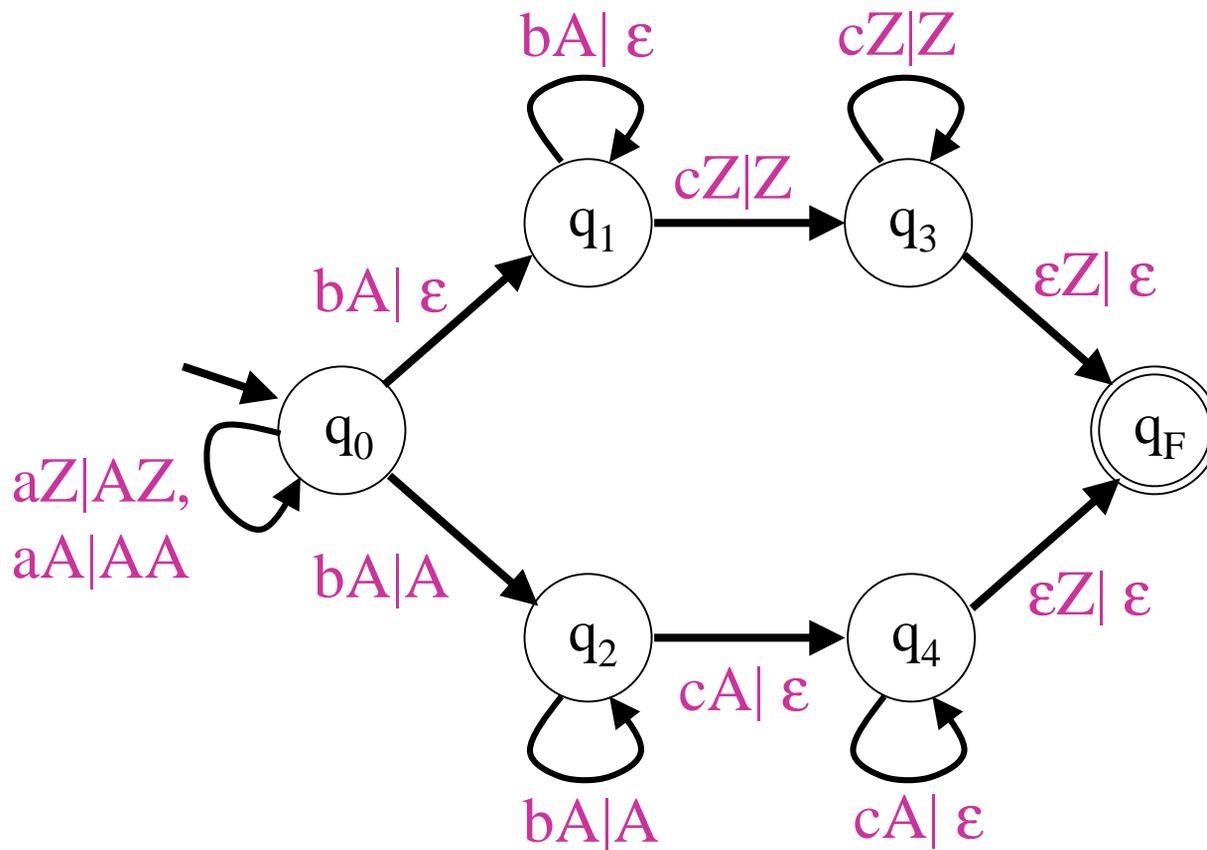
$\delta(q_0, a, Z) = \{\langle q_0, AZ \rangle\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{\langle q_0, AA \rangle\}$ conta le 'a'

$\delta(q_0, b, A) = \{\langle q_1, \epsilon \rangle, \langle q_2, A \rangle\}$ crea due rami: ($n=m$) o ($n=k$)

$\delta(q_1, b, A) = \{\langle q_1, \epsilon \rangle\}$ $\delta(q_1, c, Z) = \{\langle q_3, Z \rangle\}$ }
 $\delta(q_3, c, Z) = \{\langle q_3, Z \rangle\}$ $\delta(q_3, \epsilon, Z) = \{\langle q_F, \epsilon \rangle\}$ } ramo $n=m$

$\delta(q_2, b, A) = \{\langle q_2, A \rangle\}$ $\delta(q_2, c, A) = \{\langle q_4, \epsilon \rangle\}$ }
 $\delta(q_4, c, A) = \{\langle q_4, \epsilon \rangle\}$ $\delta(q_4, \epsilon, Z) = \{\langle q_F, \epsilon \rangle\}$ } ramo $n=k$

Esercizi svolti sui PDA



Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 6(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^m a^m b^n : n, m \geq 1\}$.

Soluzione

- accettazione per pila vuota e stato finale

$$\delta(q_0, a, Z) = \{\langle q_0, AZ \rangle\} \quad \delta(q_0, a, A) = \{\langle q_0, AA \rangle\}$$

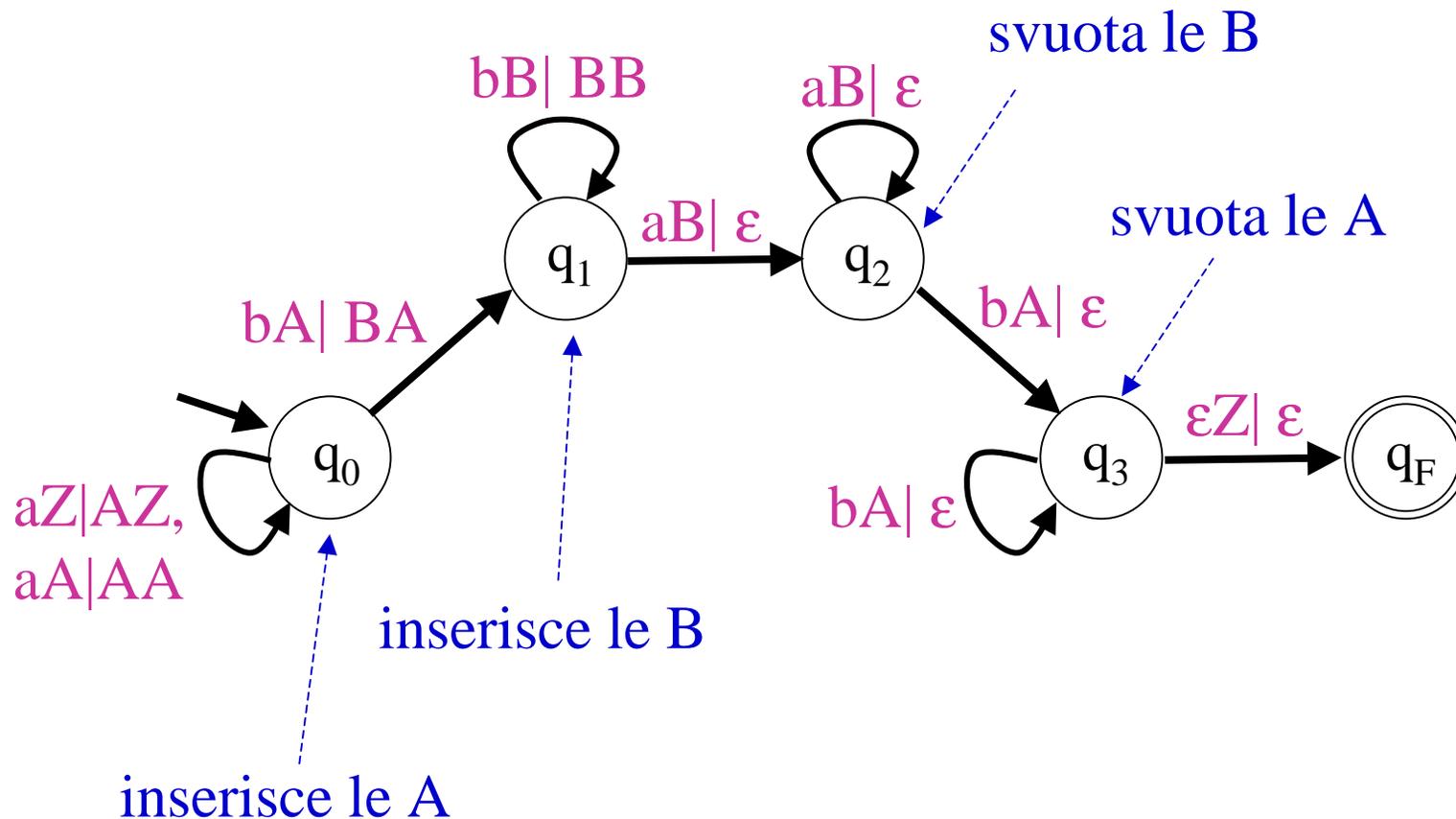
$$\delta(q_0, b, A) = \{\langle q_1, BA \rangle\}$$

$$\delta(q_1, b, B) = \{\langle q_1, BB \rangle\} \quad \delta(q_1, a, B) = \{\langle q_2, \varepsilon \rangle\}$$

$$\delta(q_2, a, B) = \{\langle q_2, \varepsilon \rangle\} \quad \delta(q_2, b, A) = \{\langle q_3, \varepsilon \rangle\}$$

$$\delta(q_3, b, A) = \{\langle q_3, \varepsilon \rangle\} \quad \delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{\langle q_F, \varepsilon \rangle\}$$

Esercizi svolti sui PDA



Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 7(***) definire un automa a pila per il linguaggio delle stringhe su $\{a,b\}$ tali che $\#a = \#b$.

Soluzione

- accettazione per pila vuota e stato finale

$$\delta(q_0, a, Z) = \{ \langle q_0, AZ \rangle \} \quad \delta(q_0, b, Z) = \{ \langle q_0, BZ \rangle \}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{ \langle q_0, AA \rangle \} \quad \delta(q_0, b, B) = \{ \langle q_0, BB \rangle \}$$

$$\delta(q_0, a, B) = \{ \langle q_0, \varepsilon \rangle \} \quad \delta(q_0, b, A) = \{ \langle q_0, \varepsilon \rangle \}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z) = \{ \langle q_F, \varepsilon \rangle \}$$

osservazione nella pila non ci possono essere contemporaneamente delle A e delle B

Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 8(***) definire un automa a pila per il linguaggio delle stringhe su $\{a,b,c\}$ tali che $\#a = \#b + \#c$.

Soluzione

- accettazione per pila vuota e stato finale

$$\delta(q_0, a, Z) = \{ \langle q_0, AZ \rangle \}, \delta(q_0, b, Z) = \{ \langle q_0, BZ \rangle \}, \delta(q_0, c, Z) = \{ \langle q_0, BZ \rangle \}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{ \langle q_0, AA \rangle \}, \delta(q_0, b, B) = \{ \langle q_0, BB \rangle \}, \delta(q_0, c, B) = \{ \langle q_0, BB \rangle \}$$

$$\delta(q_0, a, B) = \{ \langle q_0, \epsilon \rangle \}, \delta(q_0, b, A) = \{ \langle q_0, \epsilon \rangle \}, \delta(q_0, c, A) = \{ \langle q_0, \epsilon \rangle \}$$

$$\delta(q_0, \epsilon, Z) = \{ \langle q_F, \epsilon \rangle \}$$

Esercizi da svolgere sui PDA

Esercizio 9(***) definire un automa a pila per ciascuno dei seguenti linguaggi non contestuali:

- $L = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 1\}$
- $L = \{(ab)^n (cd)^n : n \geq 1\}$
- $L =$ stringhe su $\{a, b, c, d\}$ tali che $\#a + \#b = \#c + \#d$

Esercizio 10(**) mostrare l'albero di computazione per la stringa "aaabb" nell'automata dell'Esercizio 4

Esercizio 11(**) mostrare l'albero di computazione per la stringa "aabcc" nell'automata dell'Esercizio 5

Algoritmo: CFG \rightarrow PDA

input : una grammatica non contestuale (CFG) $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$

output : un PDA $A = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, \delta \rangle$ che accetta per pila vuota

- ricavare una $G' = \langle V_T, V'_N, P', S' \rangle$ in GNF equivalente a G ma che non genera ϵ

- $\Sigma = V_T$

- $\Gamma = V'_N$

- $Z_0 = S'$

- $Q = \{q\}$ e $q_0 = q$

- per ogni produzione $A \rightarrow a\gamma$ introdurre $\delta(q, a, A) \rightarrow \langle q, \gamma \rangle$

- se G genera ϵ allora aggiungere lo stato q' a Q , porre $q_0 = q'$ ed aggiungere le seguenti transizioni:

- $\delta(q', \epsilon, Z_0) \rightarrow \langle q', \epsilon \rangle$ (per riconoscere ϵ)

- $\delta(q', \epsilon, Z_0) \rightarrow \langle q, Z_0 \rangle$ (per ricondursi alle transizioni su q)

Esercizi svolti su: CFG \rightarrow PDA

Esercizio 12(***) definire un automa a pila non deterministico che riconosce il linguaggio generato dalla seguente grammatica non contestuale: $S \rightarrow a \mid S + S \mid S * S \mid (S)$

Soluzione

- portiamo la grammatica in GNF

– portiamo in quasi CNF:

$$S \rightarrow SPS \mid SMS \mid ASZ \mid a$$

$$P \rightarrow +, M \rightarrow *, A \rightarrow (, Z \rightarrow)$$

– scegliamo l'ordinamento $S < P < M < A < Z$

Esercizi svolti su: CFG \rightarrow PDA

– eliminiamo la ricursione sinistra su S:

$$S \rightarrow ASZR \mid aR \mid ASZ \mid a$$

$$R \rightarrow PSR \mid MSR \mid PS \mid MS$$

$$P \rightarrow +, M \rightarrow *, A \rightarrow (, Z \rightarrow)$$

– sostituiamo a ritroso e semplifichiamo

$$S \rightarrow (SZR \mid aR \mid (SZ \mid a$$

$$R \rightarrow +SR \mid *SR \mid +S \mid *S$$

$$Z \rightarrow)$$

- poniamo: $\Sigma = \{a, +, *, (,)\}$, $\Gamma = \{S, R, Z\}$, $Q = \{q\}$, $q_0 = q$, $Z_0 = S$
- costruiamo l'insieme delle transizioni:

Esercizi svolti su: CFG \rightarrow PDA

$$\delta(q, '(', S) = \{ \langle q, SZR \rangle, \langle q, SZ \rangle \}$$

$$\delta(q, a, S) = \{ \langle q, R \rangle, \langle q, \epsilon \rangle \}$$

$$\delta(q, +, R) = \{ \langle q, SR \rangle, \langle q, S \rangle \}$$

$$\delta(q, *, R) = \{ \langle q, SR \rangle, \langle q, S \rangle \}$$

$$\delta(q, ')', Z) = \{ \langle q, \epsilon \rangle \}$$

Esercizio 13(***) definire un automa a pila non deterministico per la seguente grammatica G non contestuale: $S \rightarrow \epsilon \mid [S] \mid SS$
(L(G) è anche detto linguaggio delle parentesi bilanciate o Dyck₁)

Esercizi svolti su: CFG \rightarrow PDA

Soluzione

- consideriamo la grammatica equivalente a G ma che non genera la stringa vuota: $S \rightarrow [S] \mid SS \mid []$

- scriviamo la grammatica in GNF:

$$S \rightarrow [Z \mid [SZ \mid [ZR \mid [SZR$$

$$R \rightarrow [Z \mid [SZ \mid [ZR \mid [SZR \mid [ZRR \mid [SZRR$$

$$Z \rightarrow]$$

- poniamo: $\Sigma = \{[,]\}$, $\Gamma = \{S, R, Z\}$, $Q = \{q, q'\}$, $q_0 = q'$, $Z_0 = S$

- costruiamo l'insieme delle transizioni:

$$\delta(q, '[', S) = \{ \langle q, Z \rangle, \langle q, SZ \rangle, \langle q, ZR \rangle, \langle q, SZR \rangle \}$$

$$\delta(q, '[', R) = \{ \langle q, Z \rangle, \langle q, SZ \rangle, \langle q, ZR \rangle, \langle q, SZR \rangle, \langle q, ZRR \rangle, \langle q, SZRR \rangle \}$$

$$\delta(q, ']', Z) = \{ \langle q, \varepsilon \rangle \} \quad \delta(q', \varepsilon, S) = \{ \langle q', \varepsilon \rangle, \langle q, S \rangle \}$$

Esercizi svolti su: CFG \rightarrow PDA

osservazione: esiste un PDA molto più semplice per il linguaggio definito dalla grammatica delle parentesi bilanciate

S = simbolo di pila iniziale

$$\delta(q, \varepsilon, S) = \{ \langle q, \varepsilon \rangle \}$$

$$\delta(q, '[', S) = \{ \langle q, AS \rangle \}$$

$$\delta(q, '[', A) = \{ \langle q, AA \rangle \}$$

$$\delta(q, ']', A) = \{ \langle q, \varepsilon \rangle \}$$

la situazione nella pila all'istante generico è così riassunta:

- se l'elemento affiorante è S allora c'è un bilanciamento di parentesi
- se l'elemento affiorante è A allora ci sono più parentesi aperte

Algoritmo: PDA \rightarrow CFG

input : un PDA $A = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, \delta \rangle$ che accetta per pila vuota

output : una grammatica non contestuale (CFG) $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$

- $V_T = \Sigma$
- $V_N = \{[pAq] : \forall p, q \in Q, \forall A \in \Gamma\} \cup \{S\}$
- l'insieme P delle produzioni è il seguente:
 - $S \rightarrow [q_0 Z_0 q] \quad \forall q \in Q$
 - $[pAq] \rightarrow a \quad \forall \langle q, \varepsilon \rangle \in \delta(p, a, A)$
 - $[pAq_{m+1}] \rightarrow a[q_1 B_1 q_2] [q_2 B_2 q_3] \dots [q_m B_m q_{m+1}]$ su ogni possibile scelta di $q_2, \dots, q_{m+1} \in Q$ $\forall \langle q_1, \gamma \rangle \in \delta(p, a, A)$ con $\gamma = B_1 \dots B_m$

Esercizio 14(***) definire una grammatica non contestuale che genera il linguaggio riconosciuto dal seguente automa a pila non deterministico:

Esercizi svolti su: PDA \rightarrow CFG

$$\Sigma = \{[,]\}, \Gamma = \{T, A\}, Q = \{q_0\}, Z_0 = T$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, T) = \{<q_0, \varepsilon>\}$$

$$\delta(q_0, '[', T) = \{<q_0, AT>\}$$

$$\delta(q_0, '[', A) = \{<q_0, AA>\}$$

$$\delta(q_0, ']', A) = \{<q_0, \varepsilon>\}$$

Soluzione

- produzioni per l'assioma:

$$S \rightarrow [q_0 T q_0]$$

- produzioni per $\delta(q_0, \varepsilon, T) = \{<q_0, \varepsilon>\}$:

$$[q_0 T q_0] \rightarrow \varepsilon$$

Esercizi svolti su: PDA \rightarrow CFG

- produzioni per $\delta(q_0, '[', A) = \{<q_0, \epsilon>\}$:
[q₀Aq₀] \rightarrow]
- produzioni per $\delta(q_0, '[', T) = \{<q_0, AT>\}$
[q₀Tq₀] \rightarrow [[q₀Aq₀] [q₀Tq₀]
- produzioni per $\delta(q_0, '[', A) = \{<q_0, AA>\}$
[q₀Aq₀] \rightarrow [[q₀Aq₀] [q₀Aq₀]

poiché q₀ è il solo stato dell'automata, possiamo rinominare i non terminali al modo: [q₀Tq₀] = T, [q₀Aq₀] = A, e riscrivere dunque la grammatica come segue:

S \rightarrow T (S = assioma)

T \rightarrow ϵ | [AT A \rightarrow] | [AA

Esercizi svolti su: PDA \rightarrow CFG

Esercizio 15(***) definire una grammatica non contestuale corrispondente al seguente automa a pila non deterministico:

$$\Sigma = \{a,b\}, \Gamma = \{Z, A\}, Q = \{q_0, q_1, q_F\}, Z_0 = Z$$

$$\delta(q_0, a, Z) = \{ \langle q_0, AZ \rangle \}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{ \langle q_0, A \rangle, \langle q_0, AA \rangle \}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{ \langle q_1, \varepsilon \rangle \}$$

$$\delta(q_1, b, A) = \{ \langle q_1, \varepsilon \rangle \}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{ \langle q_F, \varepsilon \rangle \}$$

Soluzione

Esercizi svolti su: PDA \rightarrow CFG

- produzioni per l'assioma:

$$S \rightarrow [q_0 Z q_0] \mid [q_0 Z q_1] \mid [q_0 Z q_F]$$

- produzioni per $\langle q_0, AZ \rangle \in \delta(q_0, a, Z)$:

$$[q_0 Z q_0] \rightarrow a[q_0 A q_0] [q_0 Z q_0] \mid a[q_0 A q_1] [q_1 Z q_0] \mid a[q_0 A q_F] [q_F Z q_0]$$

$$[q_0 Z q_1] \rightarrow a[q_0 A q_0] [q_0 Z q_1] \mid a[q_0 A q_1] [q_1 Z q_1] \mid a[q_0 A q_F] [q_F Z q_1]$$

$$[q_0 Z q_F] \rightarrow a[q_0 A q_0] [q_0 Z q_F] \mid a[q_0 A q_1] [q_1 Z q_F] \mid a[q_0 A q_F] [q_F Z q_F]$$

- produzioni per $\langle q_0, A \rangle \in \delta(q_0, a, A)$:

$$[q_0 A q_0] \rightarrow a[q_0 A q_0] \quad [q_0 A q_1] \rightarrow a[q_0 A q_1] \quad [q_0 A q_F] \rightarrow a[q_0 A q_F]$$

- produzioni per $\langle q_0, AA \rangle \in \delta(q_0, a, A)$:

$$[q_0 A q_0] \rightarrow a[q_0 A q_0] [q_0 A q_0] \mid a[q_0 A q_1] [q_1 A q_0] \mid a[q_0 A q_F] [q_F A q_0]$$

$$[q_0 A q_1] \rightarrow a[q_0 A q_0] [q_0 A q_1] \mid a[q_0 A q_1] [q_1 A q_1] \mid a[q_0 A q_F] [q_F A q_1]$$

$$[q_0 A q_F] \rightarrow a[q_0 A q_0] [q_0 A q_F] \mid a[q_0 A q_1] [q_1 A q_F] \mid a[q_0 A q_F] [q_F A q_F]$$

Esercizi svolti su: PDA \rightarrow CFG

- produzioni per $\langle q_1, \varepsilon \rangle \in \delta(q_0, b, A)$:

$$[q_0 A q_1] \rightarrow b$$

- produzioni per $\langle q_1, \varepsilon \rangle \in \delta(q_1, b, A)$:

$$[q_1 A q_1] \rightarrow b$$

- produzioni per $\langle q_F, \varepsilon \rangle \in \delta(q_1, \varepsilon, Z)$:

$$[q_1 Z q_F] \rightarrow \varepsilon$$

proviamo a semplificare:

- rinominiamo ciascun non terminale al modo: $[q_i A q_j] = A_{ij}$
- l'intera grammatica si riscrive dunque come segue:

Esercizi svolti su: PDA \rightarrow CFG

$$S \rightarrow Z_{00} \mid Z_{01} \mid Z_{0F}$$

$$Z_{00} \rightarrow aA_{00}Z_{00} \mid aA_{01}Z_{10} \mid aA_{0F}Z_{F0}$$

$$Z_{01} \rightarrow aA_{00}Z_{01} \mid aA_{01}Z_{11} \mid aA_{0F}Z_{F1}$$

$$Z_{0F} \rightarrow aA_{00}Z_{0F} \mid aA_{01}Z_{1F} \mid aA_{0F}Z_{FF}$$

$$A_{00} \rightarrow aA_{00}A_{00} \mid aA_{01}A_{10} \mid aA_{0F}A_{F0} \mid aA_{00}$$

$$A_{01} \rightarrow aA_{00}A_{01} \mid aA_{01}A_{11} \mid aA_{0F}A_{F1} \mid aA_{01} \mid b$$

$$A_{0F} \rightarrow aA_{00}A_{0F} \mid aA_{01}A_{1F} \mid aA_{0F}A_{FF} \mid aA_{0F}$$

$$A_{11} \rightarrow b$$

$$Z_{1F} \rightarrow \varepsilon$$

• i simboli fecondi sono: A_{01} , A_{11} , Z_{1F} , Z_{0F} , S

eliminando dunque i simboli: Z_{00} , Z_{01} , A_{00} , A_{0F} la grammatica diventa

Esercizi svolti su: PDA \rightarrow CFG

$$S \rightarrow Z_{0F}$$

$$Z_{0F} \rightarrow aA_{01}Z_{1F}$$

$$A_{01} \rightarrow aA_{01}A_{11} \mid aA_{01} \mid b$$

$$A_{11} \rightarrow b$$

$$Z_{1F} \rightarrow \varepsilon$$

- eliminando le ε -produzioni e poi le produzioni unitarie si ha:

$$S \rightarrow aA_{01}$$

$$A_{01} \rightarrow aA_{01}A_{11} \mid aA_{01} \mid b$$

$$A_{11} \rightarrow b$$

- rinominiamo i non terminali al modo: $A_{01} = A$, $A_{11} = B$

$$S \rightarrow aA$$

$$A \rightarrow aAB \mid aA \mid b$$

$$B \rightarrow b$$