Esercizi di Informatica Teorica

Calcolabilità nel modello di Turing

a cura di

Luca Cabibbo e Walter Didimo

Sommario

- calcolabilità in vari contesti
- riduzioni e calcolabilità
- dimostrazioni di decidibilità di problemi
- dimostrazioni di indecidibilità di problemi

notazioni sul livello degli esercizi: (*) facile, (**) non difficile
(***) media complessità, (****) difficile, (*****) quasi impossibile

La T-calcolabilità

definizioni di T-calcolabilità in vari contesti:

• <u>calcolo di funzioni parziali di stringa</u>:

una funzione parziale f: $(\Sigma^*)^n \rightarrow \Sigma^*$ è <u>T-calcolabile</u> se esiste una MT tale che: $q_0\underline{x} \mid\!\!-\!\!-^* \underline{x}q_F f(\underline{x}) \Leftrightarrow$ f è definita su $\underline{x} \in (\Sigma^*)^n$ (per tutti gli $\underline{x}$ su cui f non è definita, la MT o termina in uno stato non finale o non termina)

• <u>decisione (calcolo) di predicati</u>:

un predicato su Σ^* è una funzione p: $(\Sigma^*)^n \rightarrow$ {vero, falso}; p è <u>T-decidibile</u> se esiste una MT che calcola p (altrimenti p è <u>T-indecidibile</u>); p è <u>T-semi-decidibile</u> se esiste una MT che termina in uno stato finale per ogni $\underline{x}$ per cui p($\underline{x}$) è vero, mentre non termina o termina in uno stato non finale per ogni $\underline{x}$ per cui p($\underline{x}$) è falso

La T-calcolabilità

esemplificazione di linguaggio:

T-calcolabile = calcolabile

T-decidibile = decidibile

T-semi-decidibile = semi-decidibile

alcuni predicati notevoli:

• appartenenza di una stringa ad un linguaggio (riconoscimento di un linguaggio)

- il linguaggi di tipo 0 sono semi-decidibili (accettati da una MT)
- il linguaggi di tipo 1 sono decidibili (riconosciuti da una MT)

• il predicato della fermata (HALT) è indecidibile ma semi-decidibile

Riducibilità di problemi

• una istanza di un problema P è un insieme di specifiche (dati di input) che servono a definire completamente il problema P

esempio: sia P il seguente problema: determinare il numero degli abitanti della città x che hanno i capelli di colore y

l'istanza generica di P è la coppia <x,y>

una istanza specifica di P è ad esempio <Roma, verde>

• una riduzione di un problema A in un problema B è una funzione f che trasforma ogni istanza x di A in una particolare istanza $f(x)=y_x$ di B, in modo tale che trovare una soluzione per il problema B con istanza y_x equivale a trovare una soluzione per il problema A con istanza x; si scrive anche $A \rightarrow^f B$

Riducibilità e decidibilità

implicazioni importanti:

- se $A \rightarrow^{f} B$ ed f è calcolabile allora:
  - B è "difficile" almeno quanto A (cioè B è più difficile di A o è difficile quanto A), poiché risolvere B su un particolare insieme di istanze (l'insieme {f(x): x è istanza di A}) equivale a risolvere A su ogni possibile istanza x
  - B è decidibile $\Rightarrow$ A è decidibile
  - A è indecidibile $\Rightarrow$ B è indecidibile

tecnica per dimostrare che un problema P è decidibile: cerco un problema Q decidibile tale che $P \rightarrow^{f} Q$, con f calcolabile

tecnica per dimostrare che un problema P è indecidibile: cerco un problema Q indecidibile tale che $Q \rightarrow^{f} P$, con f calcolabile

Esercizi svolti sulla decidibilità

<u>Esercizio 1</u>(*****) si considerino i due seguenti problemi:

• il problema <u>CAMMINO</u>: dato un grafo G diretto e due suoi vertici x ed y, esiste un cammino diretto da x ad y?

• il problema <u>APPARTENENZA</u>: dato un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ non contestuale ed una stringa $w \in \Sigma^*$, w appartiene ad L?

sapendo che il problema <u>APPARTENENZA</u> è decidibile, dimostrare la decidibilità del problema <u>CAMMINO</u>.

<u>Soluzione</u>

cerchiamo una f calcolabile, tale che <u>CAMMINO</u> $\rightarrow^{f}$ <u>APPARTENENZA</u>

• una istanza del problema <u>CAMMINO</u> è una tripla <G,x,y>

• una istanza del problema <u>APPARTENENZA</u> è una coppia <L,w>

Esercizi svolti sulla decidibilità

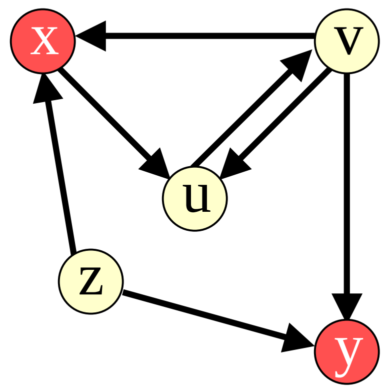
- definiamo una funzione f che a partire da una istanza <G,x,y> di <u>CAMMINO</u> produce una istanza $<L,w>_{<G,x,y>}$ di <u>APPARTENENZA</u>

  - <u>L è il linguaggio definito dalla grammatica</u> $<V_T, V_N, S, P>$:
    - V_T ha un simbolo z per ogni vertice z di G
    - V_N ha un simbolo Z per ogni vertice z di G più l'assioma S
    - P è formato dalle seguenti produzioni:
      - $S \rightarrow zZ$ e $Z \rightarrow z$ per ogni vertice z di G
      - $U \rightarrow Z$ per ogni arco (u, z) di G
  - <u>w è la stringa</u> "xy"

$f(<G,x,y>) = <L,w>_{<G,x,y>}$ è calcolabile, poiché è una semplice "traslitterazione" (traduzione meccanica in numero finito di passi)

Esercizi svolti sulla decidibilità

- vediamo un esempio di applicazione di f: sia <G,x,y> la seguente istanza



costruiamo l'istanza f (<G,x,y>) = $\langle L,w \rangle_{\langle G,x,y \rangle}$

$V_T = \{u, v, z, x, y\}$, $V_N = \{U, V, Z, X, Y, S\}$, S=assioma

produzioni: $S \rightarrow uU \mid vV \mid zZ \mid xX \mid yY$

$U \rightarrow u \quad V \rightarrow v \quad Z \rightarrow z \quad X \rightarrow x \quad Y \rightarrow y$

$U \rightarrow V \quad V \rightarrow U|X|Y \quad Z \rightarrow X|Y \quad X \rightarrow U$

stringa w = xy

Esercizi svolti sulla decidibilità

• dobbiamo dimostrare che esiste un cammino da x ad y in G $\Leftrightarrow$ w=xy appartiene ad L

• supponiamo che esista un cammino da x ad y in G, e che sia indicato al modo: $x, v_1, v_2, \ldots, v_n, y$; allora, per costruzione, esistono nella grammatica che genera L le seguenti produzioni: $S \rightarrow xX$, $X \rightarrow V_1$, $V_1 \rightarrow V_2, \ldots, V_n \rightarrow Y$, $Y \rightarrow y$
quindi, la stringa w=xy è generata dalla grammatica, cioè $w \in L$

• supponiamo viceversa che $w=xy \in L$; una derivazione per w è necessariamente del tipo: $S \vdash xX \vdash xV_1 \vdash xV_2 \vdash, \ldots, \vdash xV_n \vdash xY \vdash xy$, e dunque esistono in G gli archi $(x, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_n, y)$, che definiscono il cammino $x, v_1, v_2, \ldots, v_n, y$

Esercizi svolti sulla decidibilità

Esercizio 2(***) dimostrare la decidibilità del seguente problema (IMPLICAZIONE): siano dati un insieme di proposizioni $S=\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ ed un insieme di implicazioni logiche su S, $I=\{P_i \Rightarrow P_j : i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$; date due proposizioni P_h e P_k di S, esiste una sequenza di implicazioni logiche del tipo:

$P_h \Rightarrow P_{i_1} \Rightarrow P_{i_2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{i_r} \Rightarrow P_k$?

Soluzione

riduciamo il problema IMPLICAZIONE al problema CAMMINO, il quale è noto essere decidibile;

- una istanza del problema CAMMINO è una tripla <G,x,y>
- una istanza del problema IMPLICAZIONE è una quadrupla $<S, I, P_h, P_k>$

Esercizi svolti sulla decidibilità

- definiamo la seguente funzione $f(<S, I, P_h, P_k>) = <G,x,y>_{<S, I, P_h, P_k>}$
  - G ha un vertice r per ogni proposizione P_r di S;
  - G ha un arco (i, j) per ogni implicazione $P_i \Rightarrow P_j$ di I;
  - $x = h$
  - $y = k$

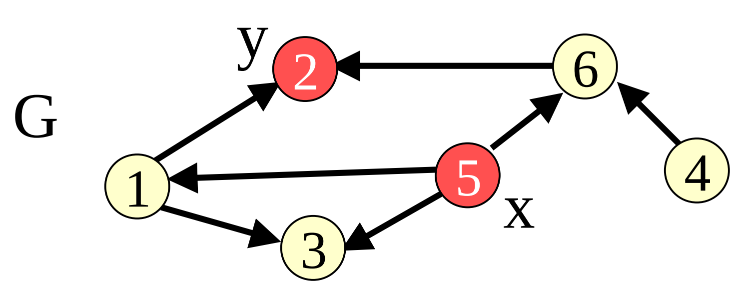
- esempio di costruzione tramite f:

$S = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

$I = \{P_1 \Rightarrow P_2,\ P_5 \Rightarrow P_3,\ P_1 \Rightarrow P_3,\ P_6 \Rightarrow P_2,\ P_5 \Rightarrow P_1,\ P_4 \Rightarrow P_6,\ P_5 \Rightarrow P_6\}$

$P_h = P_5$

$P_k = P_2$



Esercizi svolti sulla decidibilità

• <u>dimostriamo la correttezza della riduzione</u>: dobbiamo provare che esiste una sequenza di implicazioni da P_h a P_k $\Leftrightarrow$ esiste un cammino diretto da x ad y in G.

- supponiamo che esista una sequenza di implicazioni del tipo:

$$P_h \Rightarrow P_{i_1} \Rightarrow P_{i_2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{i_r} \Rightarrow P_k$$

allora in G esistono gli archi (h, i_1), (i_1, i_2), ... (i_r, k), e poiché x = h ed y = k, allora tali archi definiscono un cammino da x ad y in G;

- viceversa, supponiamo esista un cammino x, i_1, i_2, ..., i_r, y in G; questo implica che esistono gli archi (x, i_1), (i_1, i_2), ... (i_r, y) in G; poiché ad ogni arco di G corrisponde una implicazione in I, e poiché x=h ed y=k, allora esistono le seguenti implicazioni:

$$P_h \Rightarrow P_{i_1} \Rightarrow P_{i_2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{i_r} \Rightarrow P_k$$

Problemi indecidibili

tecnica per dimostrare che un problema P è indecidibile: cerco un problema Q indecidibile tale che $Q \to^f P$ ed f è calcolabile

- occorre conoscere almeno un problema Q indecidibile
- esistono due problemi indecidibili notevoli (archetipi):
  - il problema della fermata di una MT (HALT): data una MT M ed una stringa x, M terminerà la computazione su x?
  - il problema delle corrispondenze di Post (PCP): sia $C = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_n, v_n)\}$ un insieme finito di coppie di stringhe sull'alfabeto Σ; esiste una sequenza $i_1, i_2, ..., i_k$ di indici in $\{1,...,n\}$ anche ripetuti tale che: $u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} .... u_{i_k} = v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} ... v_{i_k}$? (nota: la sequenza può essere di lunghezza k qualunque)

Esercizi svolti sulla indecidibilità

Esercizio 3(****) dimostrare l'indecidibilità del seguente problema (INCLUSIONE): date due MT, M_1 ed M_2 è vero che $L(M_1) \subseteq L(M_2)$?

Soluzione

dimostriamo che il problema HALT è riducibile al problema INCLUSIONE, cioè riduciamo la generica istanza di HALT ad una particolare istanza del problema INCLUSIONE, in modo tale che la riduzione sia calcolabile;

• analizziamo le istanze dei due problemi:

– una istanza di HALT è costituita da una MT M e da una stringa w

– una istanza di INCLUSIONE è costituita da due MT, M_1 ed M_2

Esercizi svolti sulla indecidibilità

- definiamo la funzione $f(\langle M,w \rangle) = \langle M_1, M_2 \rangle_{\langle M,w \rangle}$ al modo:

– M_1 è una MT che riconosce solo w (è costruita come un ASF)

– $M_2 = M$

la funzione f è ovviamente calcolabile;

- dimostriamo che decidere se $L(M_1) \subseteq L(M)$ equivale a decidere se M si ferma quando calcola w:

per la costruzione fatta, decidere se $L(M_1) \subseteq L(M)$ equivale a decidere se $w \in L(M)$ (perché $L(M_1) = \{w\}$); d'altronde, decidere se $w \in L(M)$ equivale a decidere se M si ferma accettando w oppure no.

Esercizi svolti sulla indecidibilità

Esercizio 4(*****) dimostrare l'indecidibilità del seguente problema (INTERSEZIONE): date due grammatiche non contestuali G_1 e G_2 , è vero che $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

Soluzione

cerchiamo una riduzione: PCP $\rightarrow^f$ INTERSEZIONE

- analizziamo le istanze dei due problemi:
  - istanza di PCP: $C = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)\}$ su Σ
  - istanza di INTERSEZIONE: due CFG, G_1 e G_2

- definiamo la funzione $f(<C, \Sigma>) = <G_1,G_2>_{<C,\Sigma>}$ al modo:

Esercizi svolti sulla indecidibilità

– introduciamo n simboli: $a_1, a_2, \ldots, a_n$

– G_1 è la CFG su $\Sigma \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ definita dalle seguenti produzioni: $S_1 \rightarrow u_i a_i$, $S_1 \rightarrow u_i S_1 a_i$ $(i = 1,\ldots, n)$

– G_2 è la CFG su $\Sigma \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ definita dalle seguenti produzioni: $S_2 \rightarrow v_i a_i$, $S_2 \rightarrow v_i S_2 a_i$ $(i = 1,\ldots, n)$

• dimostriamo che decidere se esiste una sequenza di indici $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tale che $u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_k} = v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \ldots v_{i_k}$ <u>equivale</u> a decidere se $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ secondo la costruzione fatta: si osserva che

$L(G_1)=\{u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1} \ \forall m \in \mathbf{N} \text{ ed } i_j \in \{1, \ldots, n\}\}$

$L(G_2)=\{v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \ldots v_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1} \ \forall m \in \mathbf{N} \text{ ed } i_j \in \{1, \ldots, n\}\}$

ne segue che $w \in L(G_1) \cap L(G_2) \Leftrightarrow w = u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$ $= v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \ldots v_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1} \Leftrightarrow u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_m} = v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \ldots v_{i_m}$

Esercizi svolti sulla indecidibilità

quindi, $L(G_1) \cap L(G_2) = \varnothing \;\Leftrightarrow$ non esiste una sequenza di indici $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tale che $u_{i_1}\, u_{i_2}\, u_{i_3} \ldots.\, u_{i_k} = v_{i_1}\, v_{i_2}\, v_{i_3} \ldots\, v_{i_k}$;
dunque, sulla particolare istanza costruita per il problema INTERSEZIONE, rispondere al problema PCP equivale a rispondere al problema INTERSEZIONE

Esercizio 5(*****) dimostrare l'indecidibilità del seguente problema (AMBIGUITA'): data una grammatica G non contestuale, è vero che G è ambigua?

Soluzione

cerchiamo una riduzione: PCP $\longrightarrow^{f}$ AMBIGUITA'

- analizziamo le istanze dei due problemi:
  - istanza di PCP: $C = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n)\}$ su Σ
  - istanza di AMBIGUITA' : una CFG G

Esercizi svolti sulla indecidibilità

- definiamo la funzione $f(<C, \Sigma>) = <G>_{<C,\Sigma>}$ al modo:
  - introduciamo n simboli: $a_1, a_2, ..., a_n$
  - G è la CFG su $\Sigma \cup \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ definita al modo:

  $S \rightarrow S_1 | S_2$,

  $S_1 \rightarrow u_i a_i$, $S_1 \rightarrow u_i S_1 a_i$ $\quad (i = 1,..., n)$

  $S_2 \rightarrow v_i a_i$, $S_2 \rightarrow v_i S_2 a_i$ $\quad (i = 1,..., n)$

  osserviamo che $L(G) = \{u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} .... u_{i_m} a_{i_m} .... a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$, $v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} .... v_{i_m} a_{i_m} .... a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$ $\forall m \in \mathbf{N}$ ed $i_j \in \{1, ..., n\} \}$

- dimostriamo che decidere se esiste una sequenza di indici $i_1, i_2, ..., i_k$ tale che $u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} .... u_{i_k} = v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} ... v_{i_k}$ <u>equivale</u> a decidere se G, così come definita, è ambigua:

Esercizi svolti sulla indecidibilità

G è ambigua $\Leftrightarrow$ esiste una stringa w di L(G) ottenibile con due derivazioni distinte; d'altronde, data una stringa

$u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$ di L(G), esiste <u>una sola derivazione</u> che la genera <u>a partire da S_1</u> ; tale derivazione è la seguente:

$S_1 \vdash u_{i_1} S_1 a_{i_1} \vdash u_{i_1} u_{i_2} S_1 a_{i_2} a_{i_1} \vdash \ldots \vdash u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_{m-1}} S_1 a_{i_{m-1}} \ldots a_{i_2} a_{i_1}$
$\vdash u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$

analogamente, data una stringa $v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \ldots v_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1}$ di L(G), esiste <u>una sola derivazione</u> che la genera <u>a partire da S_2</u> ;

quindi, esistono due derivazioni distinte per una stringa di L(G)

$w = x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \ldots x_{i_m} a_{i_m} \ldots a_{i_3} a_{i_2} a_{i_1} \Leftrightarrow$ una derivazione è ottenuta a partire da S_1 e l'altra a partire da S_2 $\Leftrightarrow x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \ldots x_{i_m} = u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \ldots u_{i_m} = v_{i_2} v_{i_3} \ldots v_{i_m}$

Esercizi da svolgere sulla indecidibilità

<u>Esercizio 6</u>(***) dimostrare l'indecidibilità dei seguenti problemi:

• EQUIVALENZA: dati due linguaggi non contestuali L_1 ed L_2 è vero che $L_1 = L_2$?

• AMBIGUITA'1: dato un linguaggio L non contestuale, L è inerentemente ambiguo?