Esercizi di Informatica Teorica

Concetti di Base

a cura di
Luca Cabibbo e Walter Didimo

Sommario

- principio di induzione finita (o matematica)
- cardinalità di insiemi
- pigeonhole principle
- espressioni regolari

notazioni sul livello degli esercizi: (*) facile, (**) non difficile
(***) media complessità, (****) difficile, (*****) quasi impossibile

Principio di induzione finita

P.I.F. Sia P(n) una proposizione definita sui naturali;
se esiste un naturale n_0 tale che:

- P(n_0) è vera (passo base)
- P(n) vera implica P($n + 1$) vera $\forall n \geq n_0$ (passo induttivo)

allora P è vera $\forall n \geq n_0$.

Esercizio 1(*) riformulare il principio nel caso particolare di $n_0 = 0$

Principio di induzione finita

Esercizio 2(**): dimostrare che per ogni insieme finito A risulta $|P(A)| = 2^{|A|}$ (dove $P(A)$ è l'insieme delle parti di A).

Soluzione

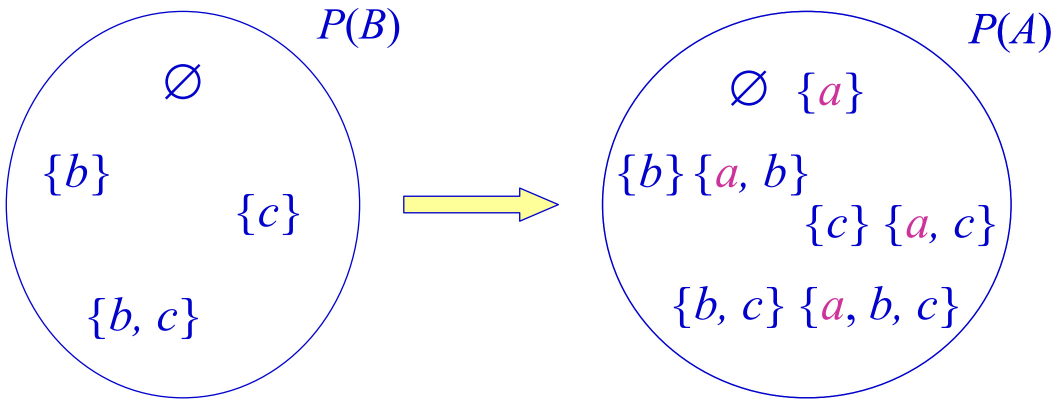
procediamo per induzione sulla cardinalità di A:

- se A è l'insieme vuoto allora $|P(A)| = 1 = 2^0$ (ok)
- supponiamo vera la proposizione per $n \geq 0$, e sia $|A| = n + 1$; sia a un qualunque elemento di A e sia $B = A - \{a\}$; per B vale la proposizione ed inoltre $P(A)$ è formato da tutti gli insiemi in $P(B)$ più gli stessi insiemi a ciascuno dei quali viene aggiunto l'elemento *a (dimostrare formalmente)*; allora: $|P(A)| = 2\,|P(B)| = 2\; 2^{|A|-1} = 2^{|A|}$ (ok)

Principio di induzione finita

Esempio: sia $A = \{a, b, c\}$; allora $|P(A)| = 2^3 = 8$.

$B = \{b, c\}$



Principio di induzione finita

Esercizio 3(****): dimostrare che $n^4 - 4\,n^2$ è divisibile per 3, per ogni naturale n (*suggerimento*: sfruttare la relazione di equivalenza modulo 3 ed applicare l'induzione due volte)

Soluzione

procediamo per induzione su n:

- se $n = 0$ è ovvio, perché zero è divisibile per 3 (ok)
- supponiamo vera la proposizione per $n \geq 0$; per $n + 1$ risulta:

$$(n+1)^4 - 4(n+1)^2 = (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 4(n^2 + 2n + 1) =$$
$$= (n^4 - 4\,n^2) + 6n^2 - 3 + 4n^3 - 4n \equiv_3 4n^3 - 4n \equiv_3 n^3 - n$$

dimostriamo quindi che $n^3 - n$ è divisibile per 3;

Principio di induzione finita

procediamo ancora per induzione su n

- per $n = 0$ è ovvio, perché 0 è divisibile per 3 (ok)
- supponiamo vera la proposizione per $n \geq 0$; risulta
  $(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1 - n - 1 =$
  $= (n^3 - n) + 3\,(n^2 + n)$ che è divisibile per 3 (ok)

quindi anche $(n+1)^4 - 4(n+1)^2$ è divisibile per 3 (ok)

Esercizio 4(*) dimostrare che la somma dei naturali da 1 ad n è pari ad $(n+1)n / 2$

Esercizio 5(***) dimostrare che dati due insiemi finiti e non vuoti A e B esistono esattamente $|B|^{|A|}$ funzioni da A a B (*suggerimento*: procedere per induzione su $|A|$)

Principio di induzione finita

Esercizio 6 (**) trovare l'errore nella dimostrazione della seguente proposizione:

proposizione: in un branco di cavalli tutti i cavalli hanno lo stesso colore

dimostrazione induttiva:

- *per un branco con* 1 *solo cavallo la proposizione è ovvia* (ok)
- *supponiamo vero l'enunciato per un qualunque branco con* $n \geq 1$ *cavalli e sia dato un branco di* $n+1$ *cavalli; se togliamo un cavallo dal branco, per l'ipotesi induttiva, rimangono n cavalli con lo stesso colore, diciamo* col1; *se togliamo un secondo cavallo dal branco e rimettiamo quello di prima, abbiamo ancora n cavalli dello stesso colore, diciamo* col2. *Poiché infine nel branco sono sempre rimasti fissi* $n - 1$ *cavalli allora deve essere* col1 = col2, *e quindi gli* $n+1$ *cavalli hanno tutti lo stesso colore.*

Cardinalità di insiemi

Richiami:

• due insiemi sono equinumerosi (o equipotenti) se esiste una biiezione tra loro
• un insieme finito con n elementi è equinumeroso a $\{0, ..., n\text{-}1\}$
• un insieme è numerabile se è equinumeroso ad **N** (cardinalità $\aleph_0$)
• un insieme è contabile se è finito oppure numerabile
• un insieme è continuo se è equinumeroso ad **R** (cardinalità $2^{\aleph_0}$)

Esercizio 7(*) mostrare un esempio per ciascuna delle classi sopra elencate

Esercizio 8(**) dimostrare che l'insieme S di tutte le possibili sequenze infinite di naturali da 0 a 9 è non numerabile

Cardinalità di insiemi

Soluzione applichiamo il ragionamento diagonale di Cantor: supponiamo per assurdo che S sia numerabile; allora possiamo contare tutte le sequenze di S:

$$
\begin{array}{ll}
s_0 & a_{00}\ a_{01}\ \dots\ a_{0i}\ \dots \\
s_1 & a_{10}\ a_{11}\ \dots\ a_{1i}\ \dots \\
\dots & \\
s_j & a_{j0}\ a_{j1}\ \dots\ a_{ji}\ \dots \\
\dots &
\end{array}
$$

consideriamo la seguente sequenza: $s \quad (a_{00} + 1)\ (a_{11} + 1)\ \dots\ (a_{ii} + 1)..,$
dove + è inteso modulo 10; s è diversa da ciascuna s_k , che è assurdo

Pigeonhole Principle (PHP)

PHP Dati due insiemi finiti e non vuoti A e B, con $|A| > |B|$, non esistono funzioni totali iniettive da A a B

Esercizio 9 (**) sia G un grafo con n vertici; dimostrare che ogni cammino di G di lunghezza maggiore di n contiene almeno un ciclo.

Soluzione

sia $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ un cammino di G tale che $m > n$; sia f la funzione totale che associa ad ogni vertice del cammino un vertice di G; per il PHP f non può essere iniettiva; sia dunque k il minimo numero per cui $f(v_i) = f(v_{i+k})$ $(1 \leq i < i+k \leq m)$; allora $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+k})$ e' un ciclo di G

Pigeonhole Principle (PHP)

Esercizio 10 (****) dimostrare che, in un qualunque gruppo di persone, esistono almeno due persone che hanno lo stesso numero di amici nel gruppo

note:

1. un gruppo è composto da almeno due persone
2. la relazione di amicizia è riflessiva e simmetrica

(*suggerimento*: dimostrare per assurdo che la funzione “numero di amici” non può essere iniettiva)

Pigeonhole Principle (PHP)

Soluzione sia A un gruppo di persone e sia $|A| = n > 1$; consideriamo la funzione f che associa ad ogni elemento (totalità) di A il suo numero di amici in A; per la riflessione ogni persona è amica almeno di se stessa e quindi: $f: A \rightarrow \{1, ..., n\}$; supponiamo per assurdo che f sia iniettiva;

- caso 1: se non $\exists\, x \in A : f(x) = 1 \;\Rightarrow\; f: A \rightarrow \{2, ..., n\}$, che è assurdo per il PHP;
- caso 2: se $\exists\, x \in A : f(x) = 1 \;\Rightarrow \forall y \in A \setminus \{x\}$ risulta
  - $f(y) \geq 2$ per l'ipotesi (assurda) di iniettività di f
  - $f(y) \leq n\text{-}1$ per la simmetria (nessuno è amico di x)

quindi f ristretta ad $A \setminus \{x\}$ dovrebbe essere totale ed iniettiva sul codominio $\{2, ..., n\text{-}1\}$, che e' assurdo per il PHP

Espressioni regolari

Definizioni di espressioni regolari e linguaggi associati su un alfabeto Σ

- $\varnothing$	$L(\varnothing) = \varnothing = \Lambda$
- a, se $a \in \Sigma$	$L(a) = \{a\}$
- $(s + t)$, se $s,t \in$ L	$L(s + t) = L(s) \cup L(t)$
- $(s \cdot t)$, se $s,t \in$ L	$L(s \cdot t) = L(s) \bullet L(t)$
- s^*, se $s \in$ L	$L(s^*) = L(s)^*$

tutti gli operatori sono associativi
relazioni di precedenza: $* > \bullet > +$
nota: il $\bullet$ viene spesso omesso, cioè $(a \bullet b)$ si scrive anche (ab)

Espressioni regolari

Esercizio 11 (**) dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- $\varnothing^* = \varnothing$
- baa $\in$ L(a*b*a*b*)
- abcd $\in$ L((a (cd)* b)*)
- a*b* $\cap$ b*a* = a* + b*
- (ab)* $\cap$ (cd)* = $\varnothing$
- (abb + a)*a = a(bba + a)*
- (a+b)* = (a*b*)*

Esercizio 12 (*) dire quali sono i linguaggi descritti dalle seguenti espressioni regolari su $\Sigma = \{0, 1\}$

- 1(0+1)*
- (0+1)* 1 (0+1)*

Espressioni regolari

Esercizio 13 (***) scrivere le espressioni regolari corrispondenti ai seguenti linguaggi su $\Sigma = \{0, 1\}$

- tutte le sequenze alternate di 0 e 1 che iniziano e finiscono per 1 o che iniziano e finiscono per 0
- tutte le sequenze con un numero pari di 0

Soluzione

- (10)*1 + (01)*0
- ((01*01*) + (1*01*0))* + 1*

Espressioni regolari

Esercizio 14 (**) scrivere l'espressione regolare che descrive il complemento dei seguenti linguaggi su $\Sigma = \{0, 1\}$

- 1 (0+1)*
- 0* + 1*

Soluzione

- (0 (0+1)*)*
- ((1+0)*0 (1+0)* 1 (1+0)*) + ((1+0)*1 (1+0)* 0 (1+0)*)

Espressioni regolari

Esercizio 15 (**) semplificare le seguenti espressioni regolari

- (a*b + b*cb)*
- ((a*b*)* (b*a*)*)*

Esercizio 16 (***) determinare le espressioni regolari per i seguenti linguaggi

- i numeri naturali in notazione binaria
- i numeri binari su 4 bit
- i numeri naturali in base 10
- i numeri naturali pari
- i numeri pari in base 3

Espressioni regolari

Soluzione

- i numeri naturali in base 2 (notazione binaria)
  0 + 1(0 + 1)*
- i numeri binari su 4 bit
  (0+1) (0+1) (0+1) (0+1)
- i numeri naturali in base 10
  0 + (1+2+3+4+5+6+7+8+9)(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)*
- i numeri naturali pari
  (0+2+4+6+8) + (1+2+..+9)(0+1+..+9)*(0+2+4+6+8)
- i numeri naturali pari in base 3 su qualsiasi numero di cifre
  (0 +2 + 1(0+2)*1)*

in una qualunque sequenza di cifre deve esserci un numero pari di 1