Esercizi di Informatica Teorica

Linguaggi regolari: pumping lemma e proprietà di chiusura

a cura di

Luca Cabibbo e Walter Didimo

Sommario

- pumping lemma
- proprietà di chiusura dei linguaggio regolari

notazioni sul livello degli esercizi: (*) facile, (**) non difficile
(***) media complessità, (****) difficile, (*****) quasi impossibile

Pumping lemma per linguaggi regolari

pumping lemma: se L è un linguaggio regolare allora $\exists\, n > 0$ tale che $\forall z \in L$ con $|z| \geq n$ $\exists$ u,v,w :

1) $z = uvw$
2) $|uv| \leq n$
3) $|v| \geq 1$
4) $z_i = uv^i w \in L \ \forall i \in \mathbf{N}$ (cioè $i = 0, 1, 2, \ldots$)

osservazioni:

1. n dipende da L (viene fissato una volta per tutte sulla base di L)
2. u, v, w dipendono da z e da n (u,v,w sono scelti in base a z e ad n)
3. u e/o w possono anche essere stringhe vuote
4. poiché può anche essere i = 0, la stringa z_0 = uw deve appartenere ad L affinché la proprietà 4 del lemma sia soddisfatta

Pumping lemma per linguaggi regolari

considerazioni per la scelta di n: si può sempre scegliere n uguale o superiore al minimo numero di stati necessari per costruire un ASF che riconosce L

utilizzo del pumping lemma: il pumping lemma rappresenta una condizione necessaria ma non sufficiente affinché un linguaggio sia regolare:

- il pumping lemma non vale per L $\Rightarrow$ L non è regolare
- il pumping lemma vale per L $\Rightarrow$ non si può dire niente per L

quindi il pumping lemma si utilizza per provare che un linguaggio è non regolare

osservazione: il pumping lemma è ovviamente vero per linguaggi finiti; basta scegliere n uguale alla lunghezza della stringa più lunga

Pumping lemma per linguaggi regolari

osservazione: spesso, per dimostrare che il pumping lemma non vale si può adottare una tecnica (debole) che non usa tutte le ipotesi:
si può mostrare che per stringhe z ("sufficientemente" lunghe) non esiste mai una suddivisione z = uvw, con $|v| \geq 1$ tale che
$z_i = uv^iw \in L \ \forall i \in \mathbf{N}$
(non sto usando l'ipotesi $|uv| \leq n$ e sto addirittura supponendo che la suddivisione non sia mai possibile da un certo n in poi)

osservazione: se non si riesce ad usare con successo la tecnica debole, allora si deve tentare di negare il pumping lemma usando tutte le ipotesi

Esercizi svolti sul pumping lemma

Esercizio 1(**) verificare la validità del pumping lemma per i seguenti linguaggio regolari

- L_1= ab*a
- L_2= a(bc)*ba
- L_3= a(bc)*ba + babab

Soluzione
- L_1= ab*a

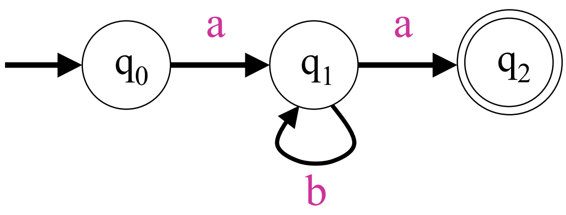
la stringa "aa" non può essere suddivisa secondo le regole del pumping lemma; ogni stringa di lunghezza > 2 invece è del tipo "abbb..bba" e può sempre essere suddivisa al modo u = "a" v="b" e w = parte restante; allora basta scegliere n = 3 affinché siano verificate le proprietà del pumping lemma

Esercizi svolti sul pumping lemma

esempio: $z = abbbba$ $\quad$ $z_6 = a\underbrace{bbbbbb}_{v^6}bbba$

(con v = la prima b)

si osservi che un ASF con il minimo numero di stati ha tre 3 stati (escludendo lo stato “pozzo” fittizio)



Esercizi svolti sul pumping lemma

- $L_2 = a(bc)^*ba$

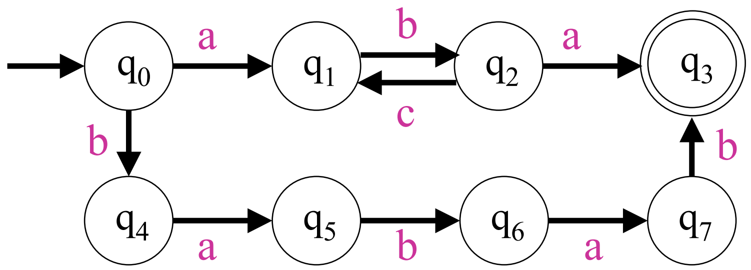
la stringa “aba” non può essere suddivisa secondo le regole del pumping lemma; ogni stringa di lunghezza > 3 invece è del tipo “abcbc..bcba” e può sempre essere suddivisa al modo u = “a” v=“bc” e w = parte restante; allora basta scegliere $n = 4$ (o n=5) affinché siano verificate le proprietà del pumping lemma (osserva che non possono esistere stringhe di lunghezza pari nel linguaggio)

esempio: $z = abcbcba$ $\quad$ $z_3 = abcbcbcbcba$

esercizio: mostrare un ASF con 4 stati (escluso lo stato pozzo) che riconosce il linguaggio L_2

Esercizi svolti sul pumping lemma

• L_3= a(bc)*ba + babab
risulta $L_3 = L_2 \cup \{babab\}$, quindi per tutte le stringhe del linguaggio, tranne che per la stringa “babab”, si può ragionare come per il linguaggio L_2;
tuttavia, la stringa “babab” non può essere suddivisa secondo le regole del pumping lemma, ed ha lunghezza 5;
quindi occorre scegliere $n \geq 6$



Esercizi svolti sul pumping lemma

Esercizio 2(***) verificare la validità del pumping lemma per il seguente linguaggio regolare
L = {s ∈ {a,b}* : s contiene un numero pari di ‘a’ e dispari di ‘b’}

Soluzione
• tutte le stringhe di L hanno lunghezza dispari
• se z è una stringa di L, in una qualunque suddivisione z = uvw, v deve contenere un numero pari di ‘a’ e un numero pari di ‘b’, affinché z_i appartenga ancora ad L (i = 0, 1, 2, ..)
• non posso suddividere la stringa “aba” con le regole sopra descritte, quindi n deve essere maggiore di 3
• è sempre possibile suddividere una stringa di L di lunghezza maggiore di 3 con le regole sopra dette ed in modo tale che $|uv| \leq 4$ e $|v| > 1$ (dimostrare formalmente studiando tutti i casi); quindi, se scegliamo n = 4, le proprietà del pumping lemma valgono

Esercizi svolti sul pumping lemma

Esercizio 3(**) dimostrare che L = $\{a^h b^k c^{h+k} : h, k > 0\}$ è un linguaggio non regolare

Soluzione

è possibile utilizzare entrambe le tecniche (debole o con utilizzo di tutte le ipotesi) per negare il pumping lemma:

- utilizzo della tecnica debole (mostro che non posso mai suddividere)
  - sia uvw ($|v| \geq 1$) una suddivisione per la stringa z = $a^h b^k c^{h+k}$;
  - v non può essere fatta di sole 'a', perché altrimenti "pompando" v sia avrebbe solo una variazione del numero di 'a', mentre il numero di 'b' e di 'c' rimarrebbe uguale (sbilanciamento)
  - analogamente a sopra, v non può essere fatta di sole 'b' o di sole 'c' (sbilanciamento)
  - infine, v non può prendere simboli misti, perché altrimenti si avrebbero delle alternanze

Esercizi svolti sul pumping lemma

- utilizzo di tutte le ipotesi

  supponiamo di poter fissare un n per cui valgano le proprietà del pumping lemma; consideriamo allora una stringa z = $a^h b^k c^{h+k}$ tale che $h > n$; allora $|z| > n$ e dovrebbe esistere una opportuna suddivisione per z; tuttavia una qualunque suddivisione z = uvw tale che $|uv| \leq n$ ($|v| \geq 1$) implica che v è fatta di sole 'a'; ma allora "pompando" v si avrebbe uno sbilanciamento del numero di 'a' rispetto al numero di 'b' e di 'c' (con $i = 0$ le 'a' diminuiscono mentre per $i > 0$ le 'a' aumentano).

esercizio dimostrare, utilizzando entrambe le tecniche del precedente esercizio, che il linguaggio L = $\{(ab)^h(cd)^h : h > 0\}$ non è regolare

Esercizi svolti sul pumping lemma

Esercizio 4(***) dimostrare che $L = \{ss \mid s \in \{a,b\}^*\}$ è un linguaggio non regolare

Soluzione

• non si può utilizzare la tecnica debole: infatti esistono sempre delle stringhe z (lunghe a piacimento) che possono essere suddivise al modo $z = uvw$ (con $|v| \geq 1$) così che z_i appartenga ad L (esempio: $z = aa\underline{aa}a...aa = u\underline{v}w$)

• utilizziamo tutte le ipotesi per negare il pumping lemma: supponiamo per assurdo che il linguaggio sia regolare; allora deve valere il pumping lemma, cioè deve esistere un n (opportunamente grande) tale che, per ogni z di L di lunghezza maggiore o uguale ad n è possibile scrivere $z = uvw$ ($|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$) in modo che $z_i = uv^iw$ appartenga ad L per ogni naturale i;

Esercizi svolti sul pumping lemma

scegliamo allora la seguente stringa di L: $z = a^kba^kb$, con $k > n$; poiché $|z|>n$, cerco una suddivisione uvw "valida" per z; questa suddivisione deve essere tale che $|uv| \leq n$, ed allora necessariamente sarà $v = a^h$ con $h < k$;
ma allora sarà $z_i = s_1 s_2$, dove s_1 ha un numero di 'a' iniziali superiore a quello si s_2 se $i > 0$ ed inferiore se $i = 0$, e questo è assurdo per l'ipotesi fatta; il pumping lemma è dunque non valido, e perciò il linguaggio è non regolare

esercizio: dimostrare che il linguaggio delle stringhe palindrome di lunghezza pari su {a,b} non è regolare

Esercizi svolti sul pumping lemma

Esercizio 5(***) sia $L = \{a^k : k$ è un numero primo$\}$; dimostrare che L è un linguaggio non regolare

Soluzione

usiamo la tecnica debole: dimostriamo cioè che, se z = aaaaa...aaa ha un numero primo di 'a', allora non è mai possibile suddividere z al modo z = uvw, così che $|z_i| = |uv^iw|$ sia un numero primo, per ogni naturale i:

- sia dunque $|z| = |a^k|$ un numero primo ($|z| \geq 2$, perché 1 non è primo)
- consideriamo una qualunque suddivisione z = uvw, con $|v| \geq 1$
- risulta $|z_i| = |u| + i|v| + |w|$
- per ogni $i > 0$ si può riscrivere $|z_i| = |z| + (i - 1)|v|$
- ma allora, per $i = |z|+1$ risulta $|z_i| = |z| + |z||v| = |z|(1+|v|)$, e quindi $|z_i|$ non è numero primo (perché prodotto di due numeri maggiori di 1)

Esercizi svolti sul pumping lemma

Esercizio 6(***) sia $L=\{a^{2^h} : h \geq 0\}$; dimostrare che L è un linguaggio non regolare

Soluzione

usiamo la tecnica debole: dimostriamo che se |z| = |aaa...aa| è una potenza di 2, allora non è mai possibile suddividere z al modo z = uvw così che $|z_i| = |uv^iw|$ sia una potenza di 2, per ogni naturale i:

- sia $|z| = |a^{2^h}| = 2^h$ con $h \geq 0$
- consideriamo una qualunque suddivisione z = uvw, con $|v| \geq 1$
- risulta $|z_i| = |u| + i|v| + |w|$
- per $i > 0$ si può riscrivere $|z_i| = |z| + (i - 1)|v| = 2^h + (i - 1)|v|$

Esercizi svolti sul pumping lemma

- sono possibili due casi per $|v|$:
  - $|v|$ è un numero dispari; in questo caso per $i = 2$ risulta $|z_i| = 2^h + (i - 1)|v| = 2^h + |v|$, che è un numero dispari maggiore di 2 e quindi non può essere una potenza di 2
  - $|v|$ è un numero pari; in questo caso per $i = (2^h + 1)$ risulta $|z_i| = 2^h + (i - 1)|v| = 2^h + 2^h|v| = 2^h (1+|v|)$ che ancora una volta non può essere una potenza di due perché $(1+|v|)$ è dispari (e quindi contiene almeno un fattore diverso da 2).

esercizio: dimostrare che il linguaggio delle stringhe su {a,b,c}, tali che il numero di 'a' al quadrato più il numero di 'b' al quadrato è uguale al numero di 'c' al quadrato (cioè $(\#a)^2+(\#b)^2 = (\#c)^2$) è non regolare

Esercizi da svolgere sul pumping lemma

Esercizio 7(***) provare la validità del pumping lemma per i seguenti linguaggi regolari, stabilendo qual'è il minimo *n* utilizzabile per la prova

- $L_1 = aa(bb)^*$
- $L_2 = abc + accb + a(cc)^*ba$
- L_3 = insieme delle stringhe in $\{a,b\}^+$ con un numero pari di 'a'

Esercizio 8(***) dimostrare, utilizzando il pumping lemma, che i seguenti linguaggi non sono regolari:

- $L_1 = \{a^k b a^k : k > 0\}$
- $L_2 = \{a^h b^k : k > h > 0\}$
- $L_3 = \{a^k b^h : k > h > 0\}$
- $L_4 = \{s \in \{a,b\}^* :$ il numero di 'a' è maggiore del numero di 'b'$\}$

Proprietà di chiusura dei linguaggi regolari

teorema: se L_1 ed L_2 sono due linguaggi regolari $\Rightarrow$ anche i seguenti linguaggi sono regolari

- $L = L_1 \cup L_2$ (unione)
- $L = L_1 \bullet L_2$ (concatenazione)
- $L = L_1{}^*$ (chiusura stella)
- $L = \Sigma_1 - L_1$ (complementazione)
- $L = L_1 \cap L_2$ (intersezione)
- $L = L_1 - L_2$ (differenza)

Automa che riconosce il linguaggio unione

$A_1 = <\Sigma_1, K_1, F_1, \delta_{N1}, q_{01}>$ ASFND che riconosce L_1
$A_2 = <\Sigma_2, K_2, F_2, \delta_{N2}, q_{02}>$ ASFND che riconosce L_2

$A = <\Sigma, K, F, \delta_N, q_0>$ ASFND che riconosce $L = L_1 \cup L_2$

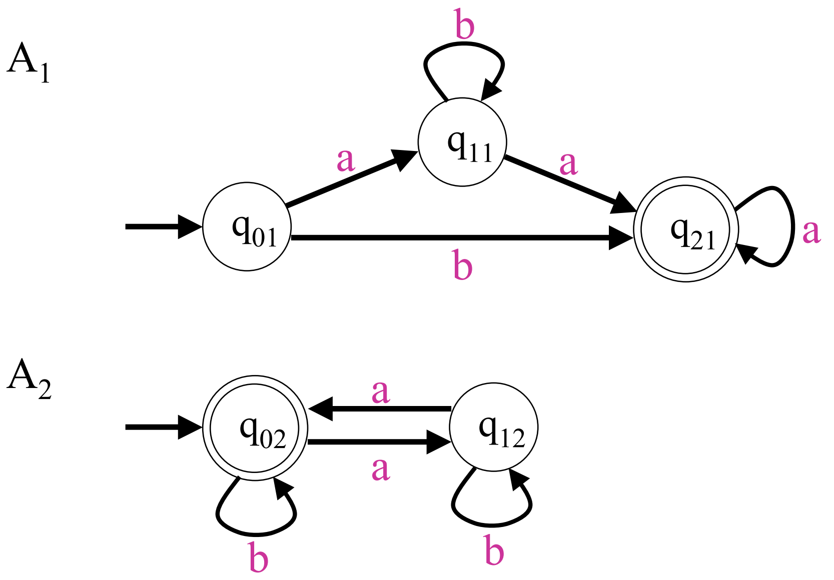
$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
$K = K_1 \cup K_2 \cup \{q_0\}$

$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 & \text{se } q_{01} \notin F_1 \text{ e } q_{02} \notin F_2 \\ F_1 \cup F_2 \cup \{q_0\} & \text{se } q_{01} \in F_1 \text{ o } q_{02} \in F_2 \end{cases}$$

$\delta_N(q,a) = \delta_{N1}(q,a) \qquad \forall q \in K_1 \ \forall a \in \Sigma_1$
$\delta_N(q,a) = \delta_{N2}(q,a) \qquad \forall q \in K_2 \ \forall a \in \Sigma_2$
$\delta_N(q_0,a) = \delta_{N1}(q_{01},a) \cup \delta_{N2}(q_{02},a) \qquad \forall a \in \Sigma$

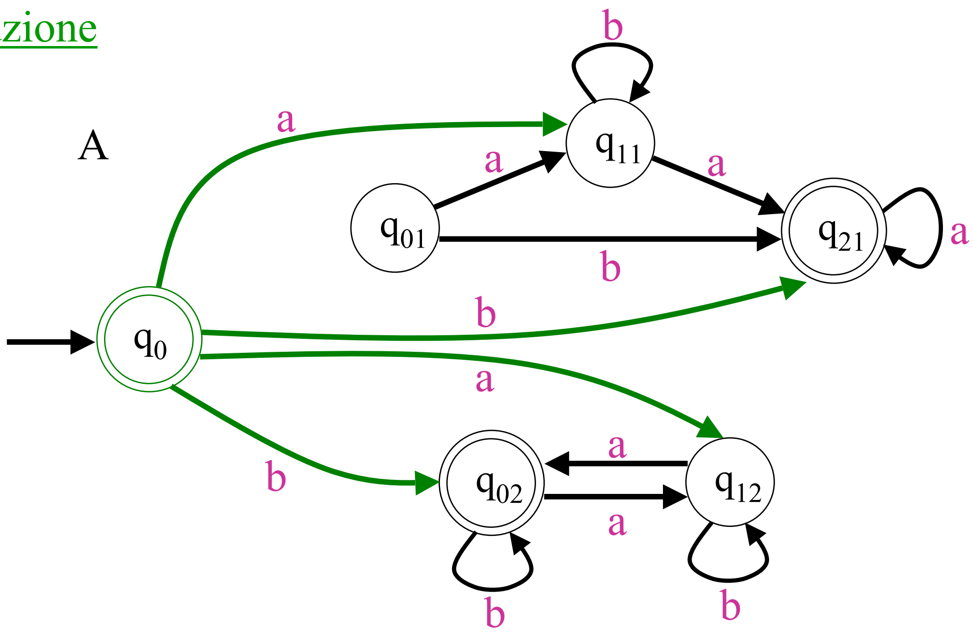
Esercizi sull'unione di automi

Esercizio 9(**) determinare l'automa $A = A_1 \cup A_2$ e dire quale linguaggio riconosce, scrivendolo sotto forma di espressione regolare



Esercizi sull'unione di automi

Soluzione



$L = (ab^*a + b)a^* \;+\; b^*\,(ab^*ab^*)^*$

Automa che riconosce il linguaggio concatenazione

$A_1 = <\Sigma_1, K_1, F_1, \delta_{N1}, q_{01}>$ ASFND che riconosce L_1
$A_2 = <\Sigma_2, K_2, F_2, \delta_{N2}, q_{02}>$ ASFND che riconosce L_2
$A = <\Sigma, K, F, \delta_N, q_0>$ ASFND che riconosce $L = L_1 \bullet L_2$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
$K = K_1 \cup K_2$

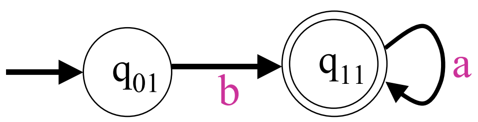
$$F = \begin{cases} F_2 & \text{se } \varepsilon \notin L_2 \\ F_1 \cup F_2 & \text{se } \varepsilon \in L_2 \end{cases}$$

$q_0 = q_{01}$
$\delta_N(q,a) = \delta_{N1}(q,a)$ $\quad \forall q \in K_1 - F_1 \quad \forall a \in \Sigma_1$
$\delta_N(q,a) = \delta_{N1}(q,a) \cup \delta_{N2}(q_{02},a)$ $\quad \forall q \in F_1 \quad \forall a \in \Sigma$
$\delta_N(q,a) = \delta_{N2}(q,a)$ $\quad \forall q \in K_2 \quad \forall a \in \Sigma_2$

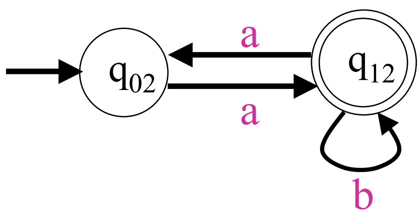
Esercizi sulla concatenazione di automi

Esercizio 10(**) determinare l'automa $A = A_1 \bullet A_2$ e dire quale linguaggio riconosce, scrivendolo sotto forma di espressione regolare

A_1

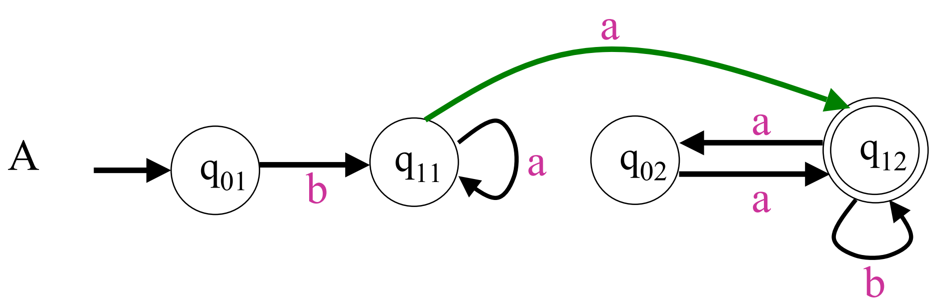


A_2



Esercizi sulla concatenazione di automi

Esercizio 10(**) determinare l'automa $A = A_1 \bullet A_2$ e dire quale linguaggio riconosce, scrivendolo sotto forma di espressione regolare



$L = ba^*a(b^*(aa)^*)^*$

Automa che riconosce il linguaggio complementare

$A = <\Sigma, K, F, \delta, q_0>$ ASF che riconosce L

$A' = <\Sigma', K', F', \delta', q'_0>$ ASF che riconosce $L' = \Sigma^* - L$

$\Sigma' = \Sigma$

$K' = K \cup \{d\}$ ('d' serve solo se c'è qualche $\delta(q,a)$ indefinito)

$F' = K - F$

$q'_0 = q_{01}$

$\delta'(q,a) = \delta(q,a)$ $\forall q \in K$ e $\forall a \in \Sigma$: $\delta(q,a)$ è definito

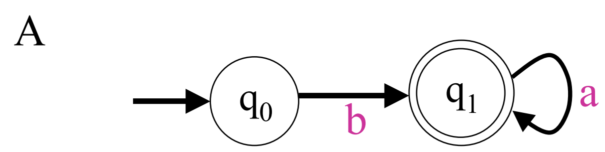
$\delta'(q,a) = d$ $\forall q \in K$ e $\forall a \in \Sigma$: $\delta(q,a)$ è indefinito

$\delta'(d,a) = d$ $\forall a \in \Sigma$

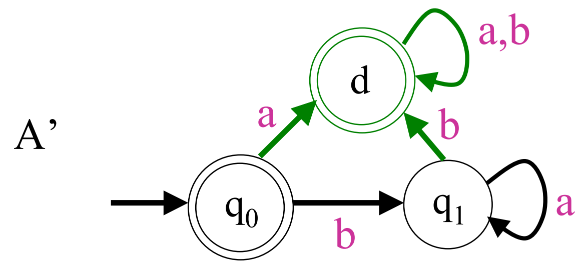
nota: si ricordi che dire che $\delta(q,a)$ è indefinito è come dire che esiste uno stato (pozzo) non finale q' tale che $\delta(q,a)=q'=\delta(q',x)$ $\forall x \in \Sigma$

Esercizi sulla complemetazione di automi

Esercizio 11(**) determinare l'automa A' complementare di A e dire quale linguaggio riconosce, scrivendolo sotto forma di espressione regolare



Soluzione



$L = (a+ba^*b)(a+b)^* + \varepsilon$

Automa che riconosce il linguaggio chiusura stella

$A = <\Sigma, K, F, \delta_N, q_0>$ ASFND che riconosce L

$A' = <\Sigma', K', F', \delta'_N, q'_0>$ ASFND che riconosce L*

$\Sigma' = \Sigma$

$K' = K \cup \{q'_0\}$

$F' = F \cup \{q'_0\}$

$\delta'_N(q,a) = \delta_N(q,a)$ $\quad \forall q \in K-F$ e $\forall a \in \Sigma$

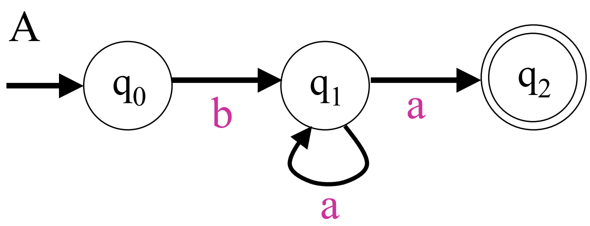
$\delta'_N(q,a) = \delta_N(q,a) \cup \delta_N(q_0,a)$ $\quad \forall q \in F$ e $\forall a \in \Sigma$

$\delta'_N(q'_0,a) = \delta_N(q_0,a)$ $\quad \forall a \in \Sigma$

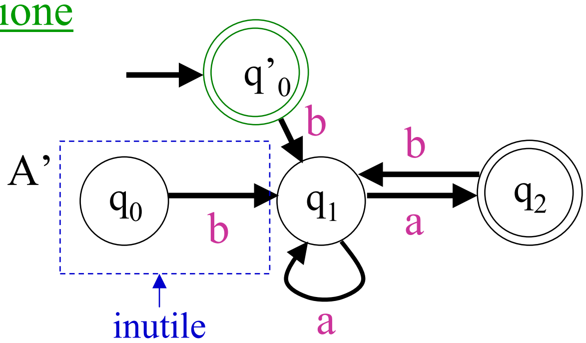
nota: lo stato q'_0 è uno stato finale perché L* contiene sempre la stringa vuota

Esercizi sulla chiusura stella di automi

Esercizio 12(**) determinare l'automa A' chiusura stella di A e dire quale linguaggio riconosce, scrivendolo sotto forma di espressione regolare



Soluzione



L = (ba*a)*

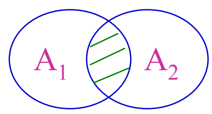
Automi che riconoscono intersezione e differenza

$A_1 = <\Sigma_1, K_1, F_1, \delta_1, q_{01}>$ ASF che riconosce L_1

$A_2 = <\Sigma_2, K_2, F_2, \delta_2, q_{02}>$ ASF che riconosce L_2

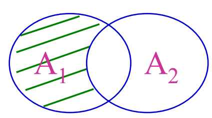
- ASFND che riconosce $L = L_1 \cap L_2$ (intersezione)

  $A = A_1 \cap A_2 = c\,(\,c(A_1) \cup c\,(A_2)\,)$



- ASFND che riconosce $L = L_1 - L_2$ (differenza)

  $A = A_1 - A_2 = c\,(c\,(A_1) \cup A_2)$



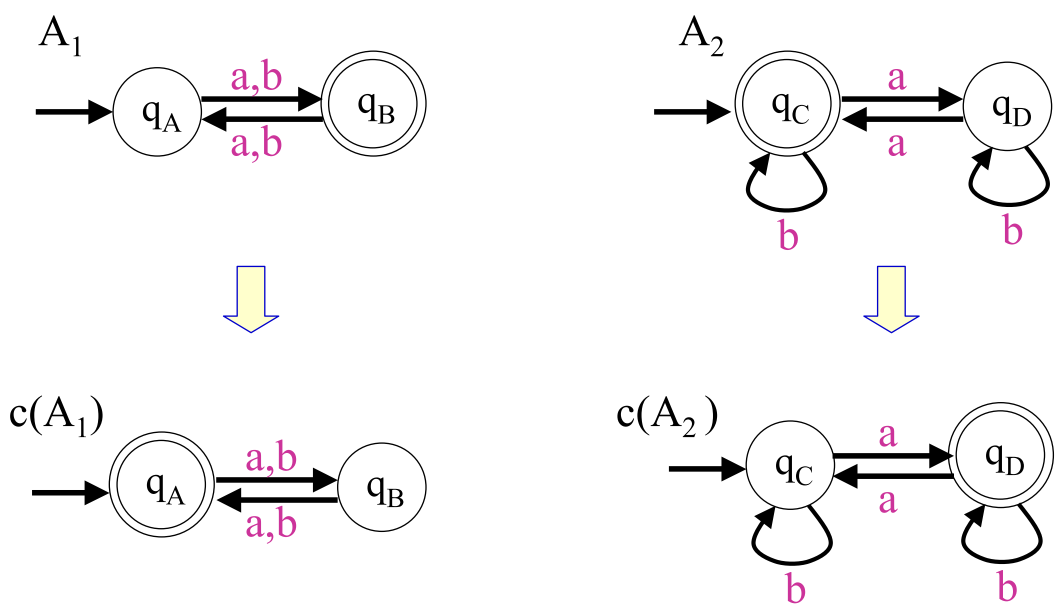
Esercizi svolti sulle proprietà di chiusura

Esercizio 13(***) dimostrare che il linguaggio $L \subseteq \{a,b\}^*$ delle stringhe di lunghezza dispari e con un numero pari di 'a' è regolare; costruire poi un ASF che riconosce L

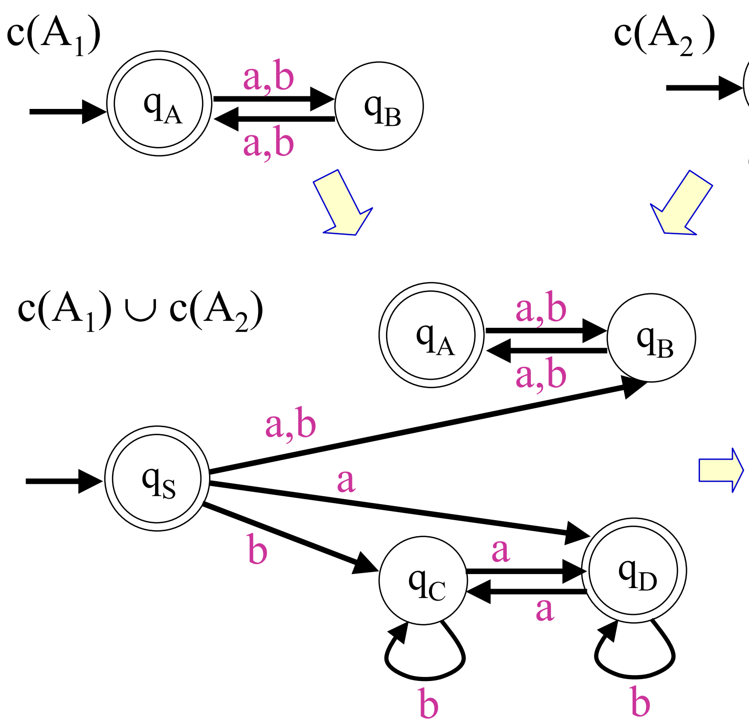
Soluzione

• il linguaggio L_1 delle stringhe su $\{a,b\}$ di lunghezza dispari è regolare, infatti: $L_1 = (a+b)((a+b)(a+b))^*$
• il linguaggio L_2 delle stringhe su $\{a,b\}$ con un numero pari di 'a' è regolare, infatti: $L_2 = b^*(ab^*ab^*)^*$
• il linguaggio L è l'intersezione di L_1 ed L_2, cioè: $L = L_1 \cap L_2$, quindi è regolare per le proprietà di chiusura dei linguaggio regolari

Esercizi svolti sulle proprietà di chiusura

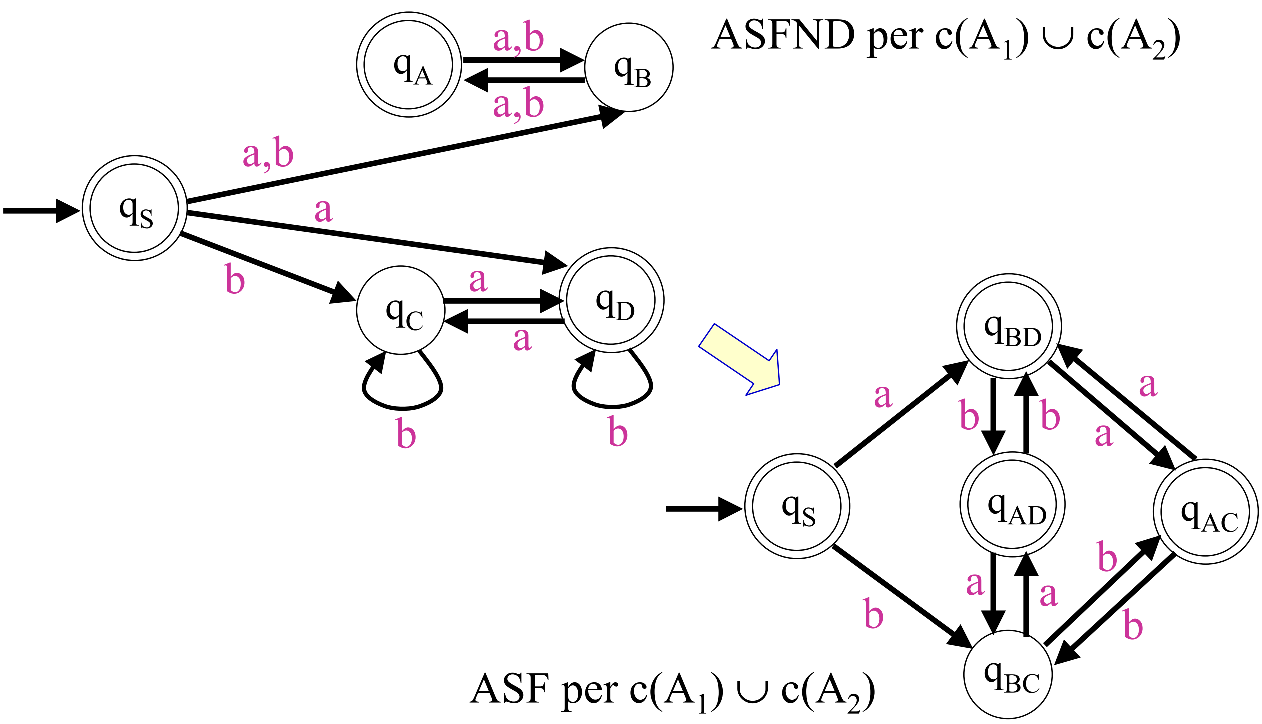


Esercizi svolti sulle proprietà di chiusura



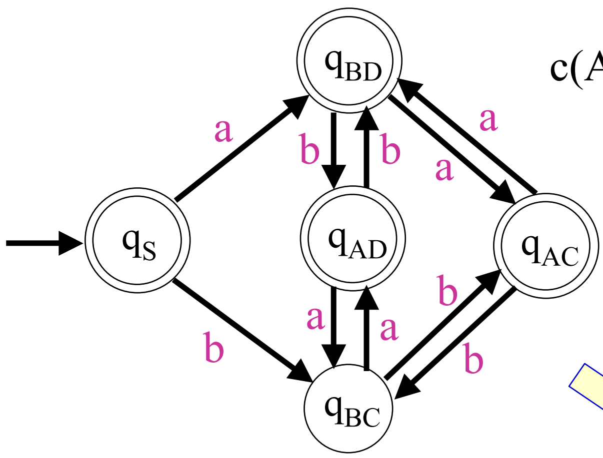
per poter costruire il complementare, occorre prima ricavare l'ASF dall'ASFND

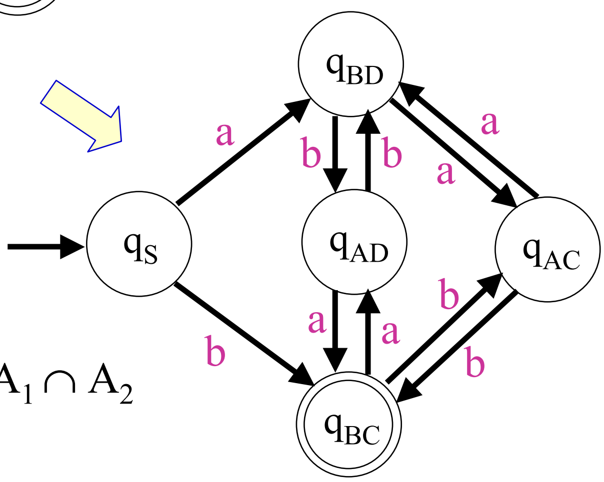
Esercizi svolti sulle proprietà di chiusura



Esercizi svolti sulle proprietà di chiusura

$c(A_1) \cup c(A_2)$





$c(c(A_1) \cup c(A_2)) = A_1 \cap A_2$

Esercizi svolti sulle proprietà di chiusura

Esercizio 14(***) dimostrare, utilizzando le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari, che il linguaggio L delle stringhe non vuote su {a,b} contenenti lo stesso numero di ‘a’ e di ‘b’ non è regolare

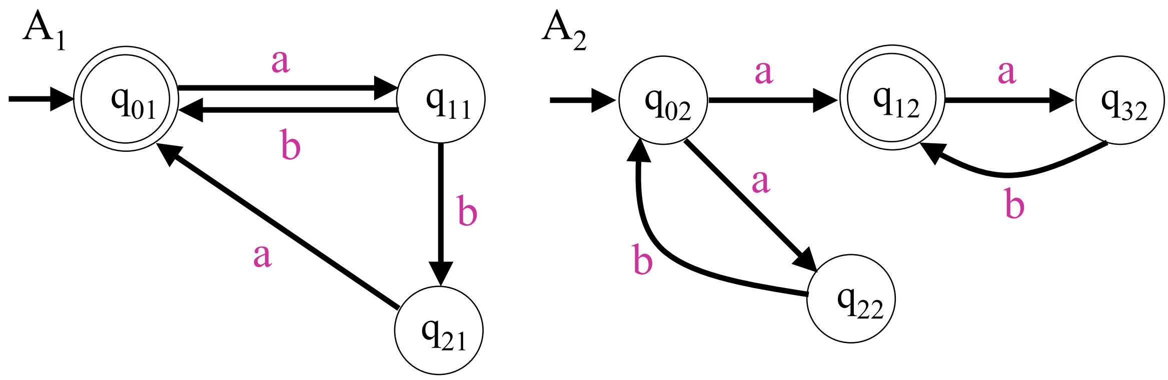
Soluzione

- supponiamo per assurdo che L sia regolare
- il linguaggio L’ = $\{a^n b^m : n,m > 0\}$ è regolare, infatti L’ = aa*bb*
- allora, per le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari, dovrebbe essere che $L \cap L'$ è un linguaggio regolare; tuttavia risulta $L \cap L' = \{a^n b^n : n>0\}$, il quale sappiamo essere un linguaggio non regolare
- da ciò l’assurdo

esercizio: dimostrare che L non è regolare usando il pumping lemma; si riesce ad applicare la tecnica debole per negare il pumping lemma?

Esercizi da svolgere sulle proprietà di chiusura

Esercizio 15(***) dati i seguenti ASFND



costruire gli ASFND unione e differenza di A_1 e A_2

Esercizio 16(***) si dimostri, usando le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari, che il linguaggio L delle stringhe su {a,b,c} con un numero pari di ‘a’ più ‘b’ è regolare; costruire inoltre un ASFND che riconosce L