Esercizi di Informatica Teorica

Linguaggi non contestuali: automi a pila

a cura di
Luca Cabibbo e Walter Didimo

Sommario

- automi a pila
- automi a pila e grammatiche non contestuali

notazioni sul livello degli esercizi: (*) facile, (**) non difficile
(***) media complessità, (****) difficile, (*****) quasi impossibile

Automa a pila (PDA)

automa a pila non deterministico (PDA) :

$A = <\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta>$ dove

- Σ è l'alfabeto (finito) di input
- Γ è l' alfabeto (finito) dei simboli della pila
- Z_0 è il simbolo di pila iniziale
- Q è un insieme (finito e non vuoto) di stati
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathbf{P}(Q \times \Gamma^*)$ è la funzione di transizione;

la transizione $\delta(q, a, A) \rightarrow <q',\gamma>$ indica che: dallo stato q, leggendo 'a'(che può anche essere ε) dalla stringa di input e 'A' come elemento affiorante dalla pila, si passa allo stato q' e si inserisce γ al posto di A in pila

Configurazioni e transizioni

- un automa a pila è deterministico se per ogni stato q, simbolo di input 'a' e simbolo di pila 'A', riesce: $| \delta(q, a, A) | + | \delta(q, \varepsilon, A) | \leq 1$

- configurazione (istantanea): $<q, x, \gamma>$, dove
  - q è lo stato corrente
  - x è la stringa di input ancora da leggere
  - γ è la stringa ancora presente in pila (il primo simbolo di γ è quello affiorante dalla pila)
- transizione tra configurazioni: $<q, x, \gamma> \vdash <q', x', \gamma'> \Leftrightarrow$
  - $x = ax'$, $\gamma = A\alpha$, $\gamma' = \beta\alpha$, $<q', \beta> \in \delta(q, a, A)$ oppure
  - $x = x'$, $\gamma = A\alpha$, $\gamma' = \beta\alpha$, $<q', \beta> \in \delta(q, \varepsilon, A)$
- computazione: chiusura transitiva e riflessiva $\vdash^*$ di $\vdash$

Linguaggio riconosciuto da un PDA

definizioni di accettazione:

• accettazione per pila vuota: una stringa x è accettata da un PDA ⇔ al termine della computazione su x la pila è vuota

• accettazione per stato finale: una stringa x è accettata da un PDA ⇔ al termine della computazione su x il PDA è su uno stato finale

linguaggio riconosciuto da un PDA: insieme delle stringhe accettate dal PDA

teorema: i linguaggi riconosciuti dai PDA che accettano per pila vuota sono tutti e soli i linguaggi riconosciuti dai PDA che accettano per stato finale (equivalenza dei linguaggi nelle due definizioni)

Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 1(**) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$.

Soluzione

• accettazione per pila vuota

$\Sigma = \{a,b\}$, $\Gamma=\{Z, A\}$, $Z_0= Z$, $Q =\{q_0, q_1\}$

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, A>\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$ $\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$

Esercizi svolti sui PDA

computazione sulla stringa “aaabbb”

$<q_0, aaabbb, Z> \vdash <q_0, aabbb, A> \vdash <q_0, abbb, AA> \vdash$
$<q_0, bbb, AAA> \vdash <q_1, bb, AA> \vdash <q_1, b, A> \vdash <q_1, \varepsilon, \varepsilon>$

• accettazione per stato finale

$\Sigma = \{a,b\}, \Gamma=\{Z, A\}, Z_0= Z, Q =\{q_0, q_1, q_F\}$, $F = \{q_F\}$

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\quad\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$

$\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$ $\quad\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{<q_F, Z>\}$

domanda: come si può modificare l’automa affinché accetti contemporaneamente per pila vuota e per stato finale?

Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 2(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^{2n} : n \geq 1\}$.

Soluzione

• accettazione per pila vuota

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AA>\}$ $\quad\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AAA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$ $\quad\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon >\}$

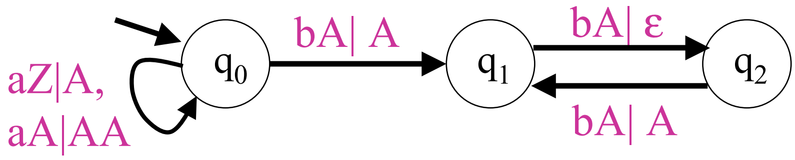
Esercizi svolti sui PDA

soluzione alternativa con accettazione per pila vuota

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, A>\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, A>\}$ $\delta(q_1, b, A) = \{<q_2, \varepsilon>\}$

$\delta(q_2, b, A) = \{<q_1, A>\}$



Esercizio 3(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^m : m \geq n \geq 1\}$.

Esercizi svolti sui PDA

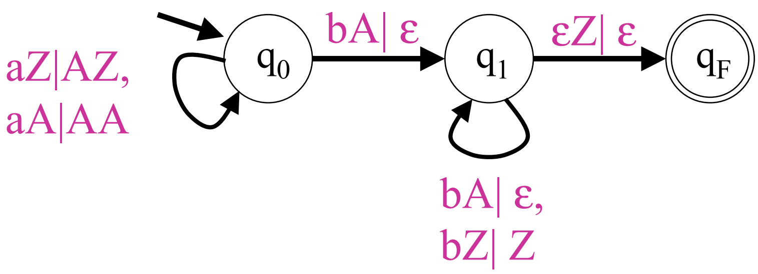
Soluzione

- accettazione per pila vuota (e stato finale)

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$ $\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_1, b, Z) = \{<q_1, Z>\}$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$



Esercizi svolti sui PDA

albero di computazione per la stringa “abb”

$<q_0, abb, Z>$

↓

$<q_0, bb, AZ>$

↓

$<q_1, b, Z>$

$\delta(q_1, b, Z)$ ↙ ↘ $\delta(q_1, \varepsilon, Z)$

$<q_1, \varepsilon, Z>$ $\qquad$ $\boxed{<q_F, b, \varepsilon>}$ ← non accettante

↓

$\boxed{<q_F, \varepsilon, \varepsilon>}$ ← accettata sia per stato finale che per pila vuota

Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 4(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale $L = \{a^n b^m : n \geq m \geq 1\}$.

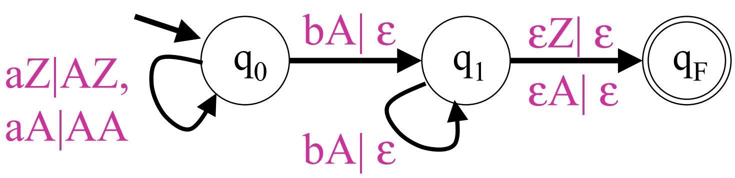
Soluzione

• accettazione per stato finale

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\qquad$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$ $\qquad$ $\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{<q_F, \varepsilon>\}$ $\qquad$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$



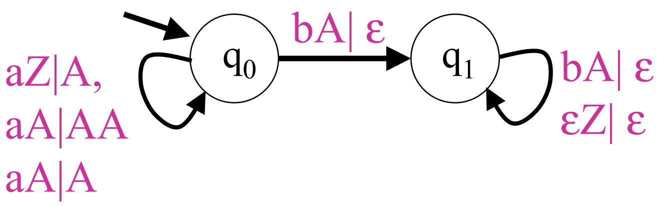
Esercizi svolti sui PDA

• accettazione per pila vuota

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>, <q_0, A>\}$

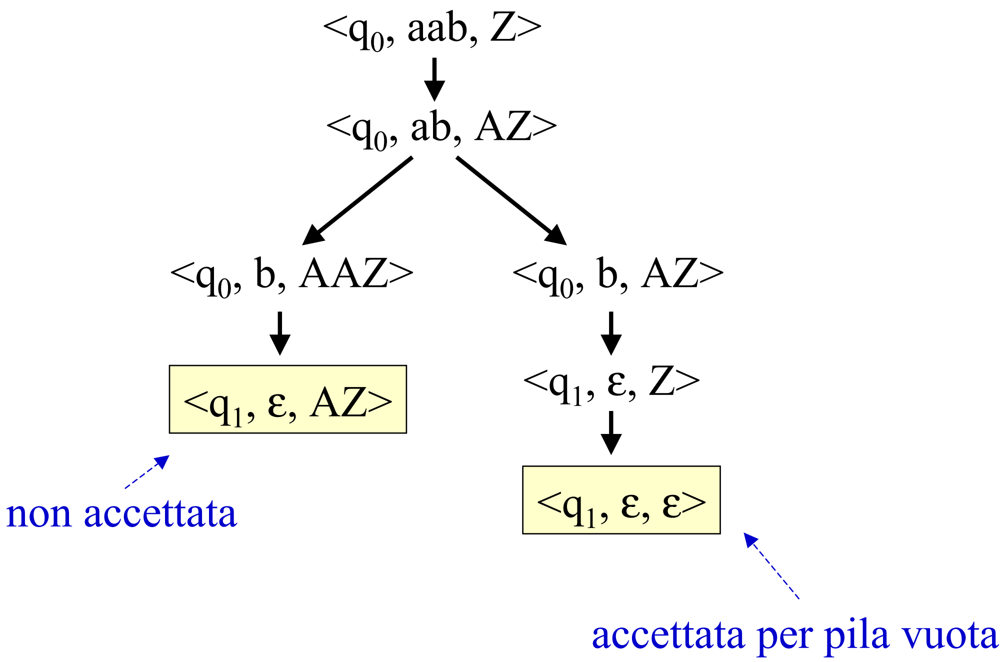
$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$ $\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{<q_1, \varepsilon>\}$



Esercizi svolti sui PDA

albero di computazione per la stringa “aab”



Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 5(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale L = $\{a^n b^m c^k : n,m,k \geq 1$ ed $n=m$ o $n=k\}$.

Soluzione

• accettazione per pila vuota e stato finale

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\quad$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$ conta le 'a'

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>, <q_2, A>\}$ crea due rami: ($n=m$) o ($n=k$)

$\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$ $\quad$ $\delta(q_1, c, Z) = \{<q_3, Z>\}$

$\delta(q_3, c, Z) = \{<q_3, Z>\}$ $\quad$ $\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

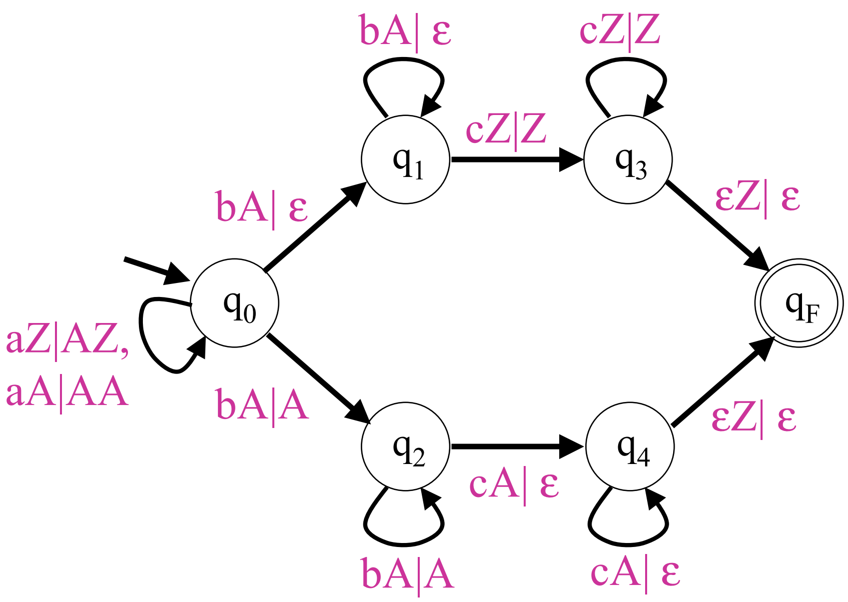
ramo $n=m$

$\delta(q_2, b, A) = \{<q_2, A>\}$ $\quad$ $\delta(q_2, c, A) = \{<q_4, \varepsilon>\}$

$\delta(q_4, c, A) = \{<q_4, \varepsilon>\}$ $\quad$ $\delta(q_4, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

ramo $n=k$

Esercizi svolti sui PDA



Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 6(***) definire un automa a pila per il linguaggio non contestuale L = $\{a^n b^m a^m b^n : n,m \geq 1\}$.

Soluzione

• accettazione per pila vuota e stato finale

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$

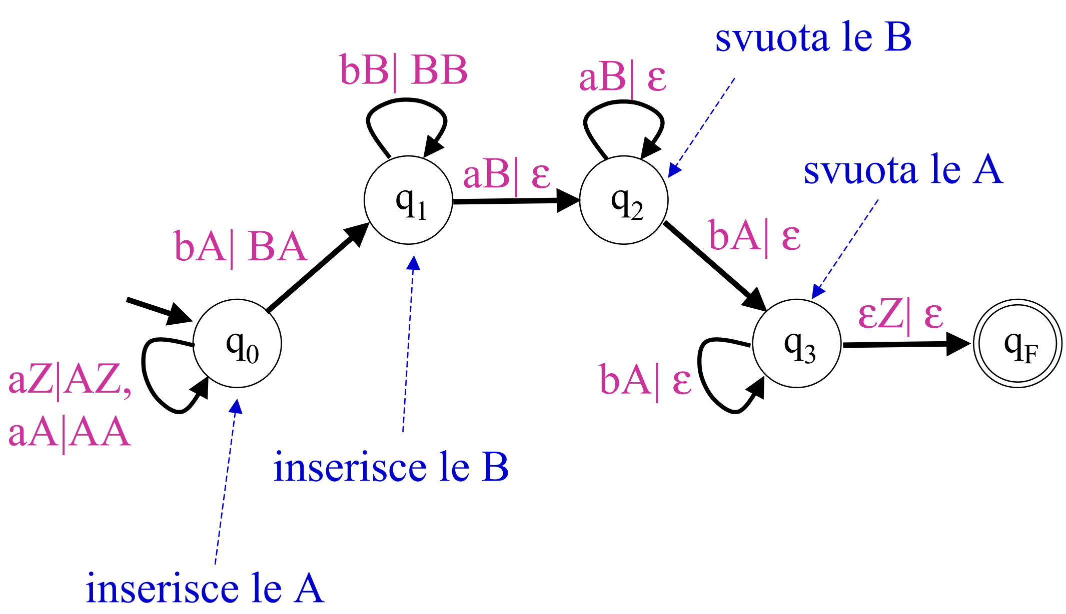
$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, BA>\}$

$\delta(q_1, b, B) = \{<q_1, BB>\}$ $\delta(q_1, a, B) = \{<q_2, \varepsilon>\}$

$\delta(q_2, a, B) = \{<q_2, \varepsilon>\}$ $\delta(q_2, b, A) = \{<q_3, \varepsilon>\}$

$\delta(q_3, b, A) = \{<q_3, \varepsilon>\}$ $\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

Esercizi svolti sui PDA



Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 7(***) definire un automa a pila per il linguaggio delle stringhe su $\{a,b\}$ tali che $\#a = \#b$.

Soluzione

• accettazione per pila vuota e stato finale

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$ $\delta(q_0, b, Z) = \{<q_0, BZ>\}$

$\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, AA>\}$ $\delta(q_0, b, B) = \{<q_0, BB>\}$

$\delta(q_0, a, B) = \{<q_0, \varepsilon>\}$ $\delta(q_0, b, A) = \{<q_0, \varepsilon>\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

osservazione nella pila non ci possono essere contemporaneamente delle A e delle B

Esercizi svolti sui PDA

Esercizio 8(***) definire un automa a pila per il linguaggio delle stringhe su $\{a,b,c\}$ tali che $\#a = \#b + \#c$.

Soluzione

• accettazione per pila vuota e stato finale

$\delta(q_0, a, Z)=\{<q_0, AZ>\}$, $\delta(q_0, b, Z)=\{<q_0, BZ>\}$, $\delta(q_0, c, Z)=\{<q_0, BZ>\}$

$\delta(q_0, a, A)=\{<q_0, AA>\}$, $\delta(q_0, b, B)=\{<q_0, BB>\}$, $\delta(q_0, c, B)=\{<q_0, BB>\}$

$\delta(q_0, a, B)=\{<q_0, \varepsilon>\}$, $\delta(q_0, b, A)=\{<q_0, \varepsilon>\}$, $\delta(q_0, c, A)=\{<q_0, \varepsilon>\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

Esercizi da svolgere sui PDA

Esercizio 9(***) definire un automa a pila per ciascuno dei seguenti linguaggi non contestuali:

- L = $\{a^n c^m b^n : n,m \geq 1\}$
- L = $\{(ab)^n (cd)^n : n \geq 1\}$
- L = stringhe su {a,b,c,d} tali che #a + #b = #c + #d

Esercizio 10(**) mostrare l'albero di computazione per la stringa "aaabb" nell'automa dell'Esercizio 4

Esercizio 11(**) mostrare l'albero di computazione per la stringa "aabcc" nell'automa dell'Esercizio 5

Algoritmo: CFG → PDA

input : una grammatica non contestuale (CFG) $G = < V_T, V_N, P, S >$

ouput : un PDA $A = < \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, \delta >$ che accetta per pila vuota

- ricavare una $G' = < V_T, V'_N, P', S' >$ in GNF equivalente a G ma che non genera ε
- $\Sigma = V_T$
- $\Gamma = V'_N$
- $Z_0 = S'$
- $Q = \{q\}$ e $q_0 = q$
- per ogni produzione $A \rightarrow a\gamma$ introdurre $\delta(q, a, A) \rightarrow \langle q, \gamma \rangle$
- se G genera ε allora aggiungere lo stato q' a Q, porre $q_0 = q'$ ed aggiungere le seguenti transizioni:
  - $\delta(q', \varepsilon, Z_0) \rightarrow \langle q', \varepsilon \rangle$ (per riconoscere ε)
  - $\delta(q', \varepsilon, Z_0) \rightarrow \langle q, Z_0 \rangle$ (per ricondursi alle transizioni su q)

Esercizi svolti su: CFG $\rightarrow$ PDA

Esercizio 12(***) definire un automa a pila non deterministico che riconosce il linguaggio generato dalla seguente grammatica non contestuale: $S \rightarrow a \mid S + S \mid S * S \mid (S)$

Soluzione

- portiamo la grammatica in GNF
  - portiamo in quasi CNF:

    $S \rightarrow SPS \mid SMS \mid ASZ \mid a$

    $P \rightarrow +\ ,\ M \rightarrow *\ ,\ A \rightarrow (\ ,\ Z \rightarrow)$
  - scegliamo l'ordinamento $S < P < M < A < Z$

Esercizi svolti su: CFG $\rightarrow$ PDA

- eliminiamo la ricursione sinistra su S:

  $S \rightarrow ASZR \mid aR \mid ASZ \mid a$

  $R \rightarrow PSR \mid MSR \mid PS \mid MS$

  $P \rightarrow +\ ,\ M \rightarrow *\ ,\ A \rightarrow (\ ,\ Z \rightarrow)$
- sostituiamo a ritroso e semplifichiamo

  $S \rightarrow (SZR \mid aR \mid (SZ \mid a$

  $R \rightarrow +SR \mid *SR \mid +S \mid *S$

  $Z \rightarrow)$

• poniamo: $\Sigma = \{a, +, *, (,)\}$, $\Gamma = \{S, R, Z\}$, $Q = \{q\}$, $q_0 = q$, $Z_0 = S$

• costruiamo l'insieme delle transizioni:

Esercizi svolti su: CFG $\rightarrow$ PDA

$\delta(q, \text{'('}, S) = \{<q, SZR>, <q, SZ>\}$

$\delta(q, a, S) = \{<q, R>, <q, \varepsilon>\}$

$\delta(q, +, R) = \{<q, SR>, <q, S>\}$

$\delta(q, *, R) = \{<q, SR>, <q, S>\}$

$\delta(q, \text{')'}, Z) = \{<q, \varepsilon>\}$

Esercizio 13(***) definire un automa a pila non deterministico per la seguente grammatica G non contestuale: $S \rightarrow \varepsilon \mid [S] \mid SS$
(L(G) è anche detto linguaggio delle parentesi bilanciate o $Dyck_1$)

Esercizi svolti su: CFG $\rightarrow$ PDA

Soluzione

- consideriamo la grammatica equivalente a G ma che non genera la stringa vuota: $S \rightarrow [S] \mid SS \mid []$
- scriviamo la grammatica in GNF:

  $S \rightarrow [Z \mid [SZ \mid [ZR \mid [SZR$

  $R \rightarrow [Z \mid [SZ \mid [ZR \mid [SZR \mid [ZRR \mid [SZRR$

  $Z \rightarrow]$
- poniamo: $\Sigma = \{[,]\}$, $\Gamma = \{S, R, Z\}$, $Q = \{q, q'\}$, $q_0 = q'$, $Z_0 = S$
- costruiamo l'insieme delle transizioni:

$\delta(q, \text{'['}, S) = \{<q, Z>, <q, SZ>, <q, ZR>, <q, SZR>\}$

$\delta(q, \text{'['}, R) = \{<q, Z>, <q, SZ>, <q, ZR>, <q, SZR>, <q, ZRR>, <q, SZRR>\}$

$\delta(q, \text{']'}, Z) = \{<q, \varepsilon>\}$ $\quad \delta(q', \varepsilon, S) = \{<q', \varepsilon>, <q, S>\}$

Esercizi svolti su: CFG → PDA

osservazione: esiste un PDA molto più semplice per il linguaggio definito dalla grammatica delle parentesi bilanciate

S = simbolo di pila iniziale

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{\langle q, \varepsilon \rangle\}$

$\delta(q, \text{‘[’}, S) = \{\langle q, AS \rangle\}$

$\delta(q, \text{‘[’}, A) = \{\langle q, AA \rangle\}$

$\delta(q, \text{‘]’}, A) = \{\langle q, \varepsilon \rangle\}$

la situazione nella pila all’istante generico è così riassunta:

- se l’elemento affiorante è S allora c’è un bilanciamento di parentesi
- se l’elemento affiorante è A allora ci sono più parentesi aperte

Algoritmo: PDA → CFG

input : un PDA $A = \langle \Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, \delta \rangle$ che accetta per pila vuota

ouput : una grammatica non contestuale (CFG) $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$

- $V_T = \Sigma$
- $V_N = \{[pAq] : \forall p, q \in Q, \forall A \in \Gamma\} \cup \{S\}$
- l’insieme P delle produzioni è il seguente:
  - $S \to [q_0 Z_0 q] \quad \forall q \in Q$
  - $[pAq] \to a \quad \forall \langle q, \varepsilon \rangle \in \delta(p, a, A)$
  - $[pAq_{m+1}] \to a[q_1B_1q_2]\,[q_2B_2q_3]\ .....\ [q_mB_mq_{m+1}]$ su ogni possibile scelta di $q_2, \ldots, q_{m+1} \in Q \quad \forall \langle q_1, \gamma \rangle \in \delta(p, a, A)$ con $\gamma = B_1 \ldots B_m$

Esercizio 14(***) definire una grammatica non contestuale che genera il linguaggio riconosciuto dal seguente automa a pila non deterministico:

Esercizi svolti su: PDA $\rightarrow$ CFG

$\Sigma = \{[,]\}$, $\Gamma = \{T, A\}$, $Q = \{q_0\}$, $Z_0 = T$

$\delta(q_0, \varepsilon, T) = \{<q_0, \varepsilon>\}$

$\delta(q_0, \text{'['}, T) = \{<q_0, AT>\}$

$\delta(q_0, \text{'['}, A) = \{<q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, \text{']'}, A) = \{<q_0, \varepsilon>\}$

Soluzione

- produzioni per l'assioma:

  $S \rightarrow [q_0Tq_0]$
- produzioni per $\delta(q_0, \varepsilon, T) = \{<q_0, \varepsilon>\}$:

  $[q_0Tq_0] \rightarrow \varepsilon$

Esercizi svolti su: PDA $\rightarrow$ CFG

- produzioni per $\delta(q_0, \text{']'}, A) = \{<q_0, \varepsilon>\}$:

  $[q_0Aq_0] \rightarrow]$
- produzioni per $\delta(q_0, \text{'['}, T) = \{<q_0, AT>\}$

  $[q_0Tq_0] \rightarrow [\ [q_0Aq_0]\ [q_0Tq_0]$
- produzioni per $\delta(q_0, \text{'['}, A) = \{<q_0, AA>\}$

  $[q_0Aq_0] \rightarrow [\ [q_0Aq_0]\ [q_0Aq_0]$

poiché q_0 è il solo stato dell'automa, possiamo rinominare i non terminali al modo: $[q_0Tq_0] = T$, $[q_0Aq_0] = A$, e riscrivere dunque la grammatica come segue:

$S \rightarrow T$ (S = assioma)

$T \rightarrow \varepsilon \mid [AT$ $\qquad$ $A \rightarrow] \mid [AA$

Esercizi svolti su: PDA → CFG

Esercizio 15(***) definire una grammatica non contestuale corrispondente al seguente automa a pila non deterministico:

$\Sigma = \{a,b\}$, $\Gamma = \{Z, A\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, $Z_0 = Z$

$\delta(q_0, a, Z) = \{<q_0, AZ>\}$

$\delta(q_0, a, A) = \{<q_0, A>, <q_0, AA>\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_1, b, A) = \{<q_1, \varepsilon>\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{<q_F, \varepsilon>\}$

Soluzione

Esercizi svolti su: PDA → CFG

- produzioni per l'assioma:

  $S \rightarrow [q_0Zq_0] \mid [q_0Zq_1] \mid [q_0Zq_F]$
- produzioni per $<q_0, AZ> \in \delta(q_0, a, Z)$:

  $[q_0Zq_0] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Zq_0] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Zq_0] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FZq_0]$

  $[q_0Zq_1] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Zq_1] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Zq_1] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FZq_1]$

  $[q_0Zq_F] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Zq_F] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Zq_F] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FZq_F]$
- produzioni per $<q_0, A> \in \delta(q_0, a, A)$:

  $[q_0Aq_0] \rightarrow a[q_0Aq_0]$ $\quad [q_0Aq_1] \rightarrow a[q_0Aq_1]$ $\quad [q_0Aq_F] \rightarrow a[q_0Aq_F]$
- produzioni per $<q_0, AA> \in \delta(q_0, a, A)$:

  $[q_0Aq_0] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Aq_0] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Aq_0] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FAq_0]$

  $[q_0Aq_1] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Aq_1] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Aq_1] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FAq_1]$

  $[q_0Aq_F] \rightarrow a[q_0Aq_0]\,[q_0Aq_F] \mid a[q_0Aq_1]\,[q_1Aq_F] \mid a[q_0Aq_F]\,[q_FAq_F]$

Esercizi svolti su: PDA $\to$ CFG

- produzioni per $<q_1, \varepsilon> \in \delta(q_0, b, A)$:

  $[q_0Aq_1] \to b$

- produzioni per $<q_1, \varepsilon> \in \delta(q_1, b, A)$:

  $[q_1Aq_1] \to b$

- produzioni per $<q_F, \varepsilon> \in \delta(q_1, \varepsilon, Z)$:

  $[q_1Zq_F] \to \varepsilon$

proviamo a semplificare:

- rinominiamo ciascun non terminale al modo: $[q_iAq_j] = A_{ij}$

- l'intera grammatica si riscrive dunque come segue:

Esercizi svolti su: PDA $\to$ CFG

$S \to Z_{00} \mid Z_{01} \mid Z_{0F}$

$Z_{00} \to aA_{00}Z_{00} \mid aA_{01}Z_{10} \mid aA_{0F}Z_{F0}$

$Z_{01} \to aA_{00}Z_{01} \mid aA_{01}Z_{11} \mid aA_{0F}Z_{F1}$

$Z_{0F} \to aA_{00}Z_{0F} \mid aA_{01}Z_{1F} \mid aA_{0F}Z_{FF}$

$A_{00} \to aA_{00}A_{00} \mid aA_{01}A_{10} \mid aA_{0F}A_{F0} \mid aA_{00}$

$A_{01} \to aA_{00}A_{01} \mid aA_{01}A_{11} \mid aA_{0F}A_{F1} \mid aA_{01} \mid b$

$A_{0F} \to aA_{00}A_{0F} \mid aA_{01}A_{1F} \mid aA_{0F}A_{FF} \mid aA_{0F}$

$A_{11} \to b$

$Z_{1F} \to \varepsilon$

- i simboli fecondi sono: $A_{01}, A_{11}, Z_{1F}, Z_{0F}, S$

eliminando dunque i simboli: $Z_{00}, Z_{01}, A_{00}, A_{0F}$ la grammatica diventa

Esercizi svolti su: PDA $\rightarrow$ CFG

$S \rightarrow Z_{0F}$

$Z_{0F} \rightarrow aA_{01}Z_{1F}$

$A_{01} \rightarrow aA_{01}A_{11} \mid aA_{01} \mid b$

$A_{11} \rightarrow b$

$Z_{1F} \rightarrow \varepsilon$

- eliminando le ε-produzioni e poi le produzioni unitarie si ha:

$S \rightarrow aA_{01}$

$A_{01} \rightarrow aA_{01}A_{11} \mid aA_{01} \mid b$

$A_{11} \rightarrow b$

- rinominiamo i non terminali al modo: $A_{01}=A$, $A_{11} = B$

$S \rightarrow aA$

$A \rightarrow aAB \mid aA \mid b$

$B \rightarrow b$