Controllo di validità con il metodo dei tableaux semantici per la logica proposizionale

Il metodo dei tableaux è un metodo di dimostrazione per refutazione:
A è valida sse $\neg A$ è insoddisfacibile

Verifica di $\models A$: ricerca esaustiva di un modello di $\neg A$.
Se la ricerca fallisce, A è valida, altrimenti si trova un contromodello di A.

Un tableau è un albero, con la radice in alto.

Tableau iniziale: singolo nodo $\neg A$

Il tableau viene espanso mediante **regole di espansione**:

α-regole:	$\dfrac{A \wedge B}{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}$	$\dfrac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\ \neg B\end{array}}$	$\dfrac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\ \neg B\end{array}}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}$
β-regole:	$\dfrac{A \vee B}{A \qquad B}$	$\dfrac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \qquad \neg B}$	$\dfrac{A \rightarrow B}{\neg A \qquad B}$	

(La doppia implicazione è un simbolo definito:

$$A \equiv B =_{def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Applicazione delle regole di espansione

Espandere un nodo $A \wedge B$: aggiungere A e B in fondo a ogni ramo che passa per $A \wedge B$.

Espandere un nodo $A \vee B$: in fondo a ogni ramo che passa per $A \vee B$ si aggiunge una ramificazione; da una parte c'è A, dall'altra B.

Ogni ramo del tableau rappresenta un possibile modello della formula iniziale.

Se un ramo contiene F e $\neg F$, oppure se contiene $\perp$, esso è **chiuso** e non viene più espanso.

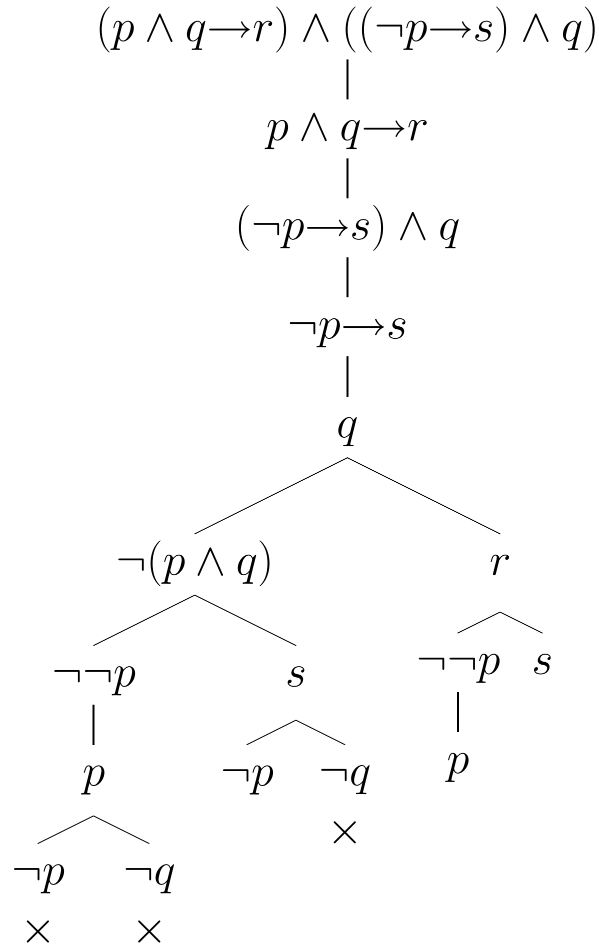
Tableaux per la ricerca di modelli

Un tableau può essere inizializzato da qualsiasi formula A: la costruzione del tableau rappresenta la ricerca di un modello per A.

Se il tableau viene espanso fin dove possibile, ogni ramo non chiuso (aperto) rappresenta un modello di A.

Se tutti i rami sono chiusi, A è insoddisfacibile.

Esempio



Il primo ramo aperto (da sinistra) rappresenta le interpretazioni $\mathcal{M}$ di $\{p, q, r, s\}$ tali che

$$\mathcal{M}(q) = \mathcal{M}(s) = T \text{ e } \mathcal{M}(p) = F;$$

sono tutte modelli di $(p \wedge q \rightarrow r) \wedge ((\neg p \rightarrow s) \wedge q)$.

Tableaux per dimostrare $S \models A$

$S \models A$ sse $S \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile:

Se $S = \{G_1, ..., G_n\}$, il tableau iniziale è un ramo:

$$
\begin{array}{l}
\bullet\ G_1 \\
| \\
\bullet\ G_2 \\
| \\
\vdots \\
\bullet\ G_n \\
| \\
\bullet\ \neg A
\end{array}
$$

Esempio

Per mostrare $A \land B \to C, \neg A \to D \models B \to (C \lor D)$:

$$
\begin{array}{c}
A \land B \to C \\
| \\
\neg A \to D \\
| \\
\neg(B \to (C \lor D))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cl}
A \land B \to C & \\
| & \\
\neg A \to D & \\
| & \\
\neg(B \to (C \lor D)) & \checkmark \\
| & \\
B & \\
| & \\
\neg(C \lor D) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cl}
A \land B \to C & \\
| & \\
\neg A \to D & \\
| & \\
\neg(B \to (C \lor D)) & \checkmark \\
| & \\
B & \\
| & \\
\neg(C \lor D) & \checkmark \\
| & \\
\neg C & \\
| & \\
\neg D &
\end{array}
$$

Esempio (segue)

$$
\begin{array}{c}
A \wedge B \to C \quad \surd \\
| \\
\neg A \to D \\
| \\
\neg(B \to (C \vee D)) \quad \surd \\
| \\
B \\
| \\
\neg(C \vee D) \quad \surd \\
| \\
\neg C \\
| \\
\neg D \\
\diagup \quad \diagdown \\
\neg(A \wedge B) \qquad C
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
A \wedge B \to C \quad \surd \\
| \\
\neg A \to D \quad \surd \\
| \\
\neg(B \to (C \vee D)) \quad \surd \\
| \\
B \\
| \\
\neg(C \vee D) \quad \surd \\
| \\
\neg C \\
| \\
\neg D \\
\diagup \qquad\qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
\neg(A \wedge B) & C \\
\diagup \quad \diagdown & \diagup \quad \diagdown \\
\neg\neg A \quad D & \neg\neg A \quad D
\end{array}
\end{array}
$$

Esempio: $A \wedge B \rightarrow C, \neg A \rightarrow D \models B \rightarrow (C \vee D)$

- $A \wedge B \rightarrow C \quad \surd$
- $\neg A \rightarrow D \quad \surd$
- $\neg(B \rightarrow (C \vee D)) \quad \surd$
- B
- $\neg(C \vee D) \quad \surd$
- $\neg C$
- $\neg D$
  - $\surd\ \neg(A \wedge B)$
    - $\surd\ \neg\neg A$
      - A
        - $\neg A$
        - $\neg B$
    - D
  - C
    - $\surd\ \neg\neg A$
      - A
    - D

Nozioni di base

- Un ramo di un tableau è **chiuso** se esso contiene sia A che $\neg A$ per qualche formula A, oppure contiene $\bot$.
- Un tableau è chiuso se tutti i suoi rami sono chiusi.
- Una **dimostrazione mediante tableau** di $S \vdash A$ è un tableau chiuso per $S \cup \{\neg A\}$.
- Un tableau è **completo** se ogni nodo che possa essere espanso è stato espanso almeno una volta.

Il metodo dei tableaux per la logica proposizionale è **corretto e completo**:

$$S \models A \text{ sse esiste una dimostrazione mediante tableaux di } S \vdash A.$$

Inoltre, nei tableaux proposizionali:

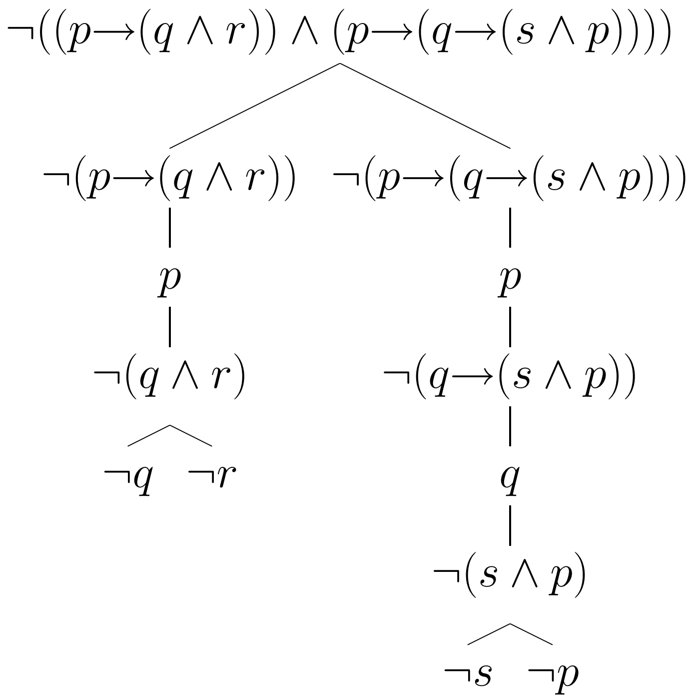
1. Se S è insoddisfacibile, è sufficiente espandere al massimo una volta ogni formula di un tableau per S per ottenere un tableau chiuso.
2. L'ordine di espansione delle formule è irrilevante per la completezza (*invertibilità delle regole*).
3. Se A è una formula, T è un tableau completo per A, $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ sono tutti i rami aperti di T, e se $\mathcal{C}(\mathcal{B}_i)$ è la congiunzione dei letterali in $\mathcal{B}_i$, allora:

   $$A \;\leftrightarrow\; \mathcal{C}(\mathcal{B}_1) \vee .... \vee \mathcal{C}(\mathcal{B}_n)$$

   Quindi il metodo dei tableaux si può anche usare per trasformare una formula in FND.

Trasformazione in FND

- costruire un tableau completo per A
- eliminare i rami chiusi
- costruire la disgiunzione delle congiunzioni dei letterali nei rami aperti



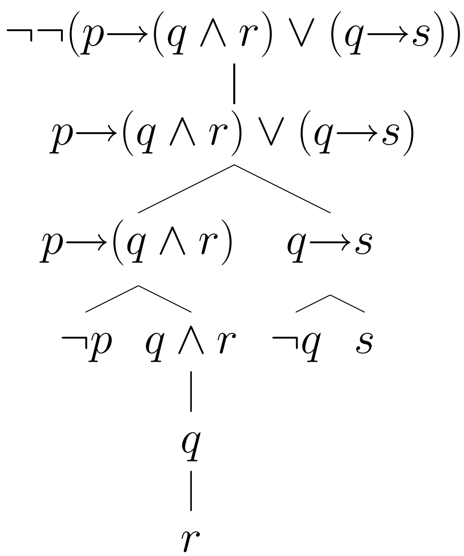
Siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ i rami più a sinistra (l'ultimo è chiuso).

ramo	letterali in $\mathcal{B}_i$	$\mathcal{C}(\mathcal{B}_i)$
$\mathcal{B}_1$	$\{p, \neg q\}$	$p \wedge \neg q$
$\mathcal{B}_2$	$\{p, \neg r\}$	$p \wedge \neg r$
$\mathcal{B}_3$	$\{p, q, \neg s\}$	$p \wedge q \wedge \neg s$

La FND di
$\neg((p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow (s \wedge p))))$
è
$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s)$.

Trasformazione in FNC

- costruire un tableau completo per $\neg A$
- eliminare i rami chiusi
- costruire la congiunzione delle disgiunzioni dei complementi dei letterali nei rami aperti



ramo	complementi dei letterali in $\mathcal{B}_i$	disgiunti della FNC
$\mathcal{B}_1$	$\{p\}$	p
$\mathcal{B}_2$	$\{\neg q, \neg r\}$	$\neg q \vee \neg r$
$\mathcal{B}_3$	$\{q\}$	q
$\mathcal{B}_4$	$\{\neg s\}$	$\neg s$

La FNC di
$\neg(p \rightarrow (q \wedge r) \vee (q \rightarrow s))$
è
$p \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge q \wedge \neg s.$

Infatti: $\quad \neg\neg(p \rightarrow (q \wedge r) \vee (q \rightarrow s)) \quad \leftrightarrow \quad \neg p \vee (q \wedge r) \vee \neg q \vee s$

Quindi:
$$\begin{aligned}
\neg(p \rightarrow (q \wedge r) \vee (q \rightarrow s)) \quad & \leftrightarrow \quad \neg(\neg p \vee (q \wedge r) \vee \neg q \vee s) \\
& \leftrightarrow \quad \neg\neg p \wedge \neg(q \wedge r) \wedge \neg\neg q \wedge \neg s \\
& \leftrightarrow \quad p \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge q \wedge \neg s
\end{aligned}$$

Si veda anche il programma `tableau` accessibile dal sito del corso