Soluzione dell'esercizio 16 del paragrafo 2.3.9, mediante ragionamento semantico

È possibile formalizzare il problema utilizzando un linguaggio con i simboli di predicato b^1 (essere un botanico), e^1 (essere eccentrico) e a^2 (amare). Il ragionamento è corretto se e solo se:

$$\begin{aligned}&\exists x(b(x) \wedge e(x)),\\ &\exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x,y)))\\ &\qquad \models \exists x(b(x) \wedge \neg\forall y(b(y) \rightarrow a(y,x)))\end{aligned}$$

Quindi il ragionamento non è corretto se e solo se esistono un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tali che:

1. $(\mathcal{M}, s) \models \exists x(b(x) \wedge e(x))$
2. $(\mathcal{M}, s) \models \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x,y)))$
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \exists x(b(x) \wedge \neg\forall y(b(y) \rightarrow a(y,x)))$

Assumiamo che ciò sia vero. Si ha che:

1. $(\mathcal{M}, s) \models \exists x(b(x) \wedge e(x))$ se e solo se esiste un oggetto d_0 nel dominio D di $\mathcal{M}$ tale che: $(\mathcal{M}, s[d_0/x]) \models b(x) \wedge e(x)$, cioè tale che:

   (1a) $d_0 \in \mathcal{M}(b)$, e

   (1b) $d_0 \in \mathcal{M}(e)$.

2. $(\mathcal{M}, s) \models \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x,y)))$ se e solo se esiste $d_1 \in D$ tale che

   (2a) $d_1 \in \mathcal{M}(b)$

   e per ogni $d \in D$, $d \notin \mathcal{M}(e)$ oppure $\langle d_1, d\rangle \notin \mathcal{M}(a)$. Quest'ultima affermazione vale anche per $d = d_0$, dunque, per (1b), si ha che

   (2b) $\langle d_1, d_0\rangle \notin \mathcal{M}(a)$

3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \exists x(b(x) \wedge \neg\forall y(b(y) \rightarrow a(y,x)))$ se e solo se per ogni oggetto $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models b(x) \wedge \neg\forall y(b(y) \rightarrow a(y,x))$. In particolare, questo vale anche per $d = d_0$, quindi $(\mathcal{M}, s[d_0/x]) \not\models b(x) \wedge \neg\forall y(b(y) \rightarrow a(y,x))$, cioè $d_0 \notin \mathcal{M}(b)$ oppure $(\mathcal{M}, s[d_0/x]) \not\models \neg\forall y(b(y) \rightarrow a(y,x))$.

   Il primo caso è impossibile, per (1a), quindi si ha che $(\mathcal{M}, s[d_0/x]) \models \forall y(b(y) \rightarrow a(y,x))$. Cioè, per ogni $d' \in D$: $(\mathcal{M}, s[d_0/x][d'/y]) \models b(y) \rightarrow a(y,x)$. Questo vale anche, in particolare, per $d' = d_1$, quindi $(\mathcal{M}, s[d_0/x][d_1/y]) \models b(y) \rightarrow a(y,x)$. Ciò significa che o $d_1 \notin \mathcal{M}(b)$ oppure $\langle d_1, d_0\rangle \in \mathcal{M}(a)$. Ma entrambi i casi sono impossibili: il primo contraddice (2a) e il secondo contraddice (2b).

Di conseguenza, l'ipotesi che esistano un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ che soddisfano tutte le premesse e non soddisfano la conclusione è assurda, dunque il ragionamento è corretto.

Se la conclusione fosse interpretata diversamente e fosse rappresentata dalla formula:

$$\exists x(b(x) \wedge \forall y(b(y) \to \neg a(y,x)))$$

(che è più forte della conclusione considerata sopra), allora il ragionamento non sarebbe corretto. Infatti:

1. $(\mathcal{M}, s) \models \exists x(b(x) \wedge e(x))$ se e solo se esiste $d_0 \in D$ tale che:

   (1a) $d_0 \in \mathcal{M}(b)$, e

   (1b) $d_0 \in \mathcal{M}(e)$.

2. $(\mathcal{M}, s) \models \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \to \neg a(x,y)))$ se e solo se esiste $d_1 \in D$ tale che

   (2a) $d_1 \in \mathcal{M}(b)$, e

   (2b) per ogni $d \in D$, $d \notin \mathcal{M}(e)$ oppure $\langle d_1, d\rangle \notin \mathcal{M}(a)$.

3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \exists x(b(x) \wedge \forall y(b(y) \to \neg a(y,x)))$ se e solo se per ogni $d \in D$, vale uno dei casi seguenti:

   (3a) $d \notin \mathcal{M}(b)$,

   oppure $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models \forall y(b(y) \to \neg a(y,x))$, cioè esiste $d_2 \in D$, tale che: $(\mathcal{M}, s[d/x][d_2/y]) \not\models b(y) \to \neg a(y,x)$. In altri termini, esiste $d_2 \in D$, tale che $(\mathcal{M}, s[d/x][d_2/y]) \models b(y)$ e $(\mathcal{M}, s[d/x][d_2/y]) \not\models \neg a(y,x)$, cioè:

   (3b) esiste $d_2 \in D$, tale che $d_2 \in \mathcal{M}(b)$ e $\langle d_2, d\rangle \in \mathcal{M}(a)$.

Consideriamo ora l'interpretazione $\mathcal{M}$ con dominio $D = \{0,1\}$, tale che $\mathcal{M}(b) = \{0,1\}$, $\mathcal{M}(e) = \{0\}$ e $\mathcal{M}(a) = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle$, e verifichiamo che $\mathcal{M}$ verifica le due premesse e falsifica la conclusione.

Se si considera $d_0 = 0$, si ha che (1a) e (1b) sono vere. Se si considera $d_1 = 1$, (2a) è vera. Inoltre, $\langle 1,0\rangle \notin \mathcal{M}(a)$ e $1 \notin \mathcal{M}(e)$, quindi anche (2b) è vera.

Per dimostrare che la conclusione è falsa in $\mathcal{M}$ mostriamo che (3b) è vera per ogni $d \in D$. Per ogni $d \in D$ si ha infatti che $d \in \mathcal{M}(b)$ e $\langle d, d\rangle \in \mathcal{M}(a)$.

Il ragionamento, dunque, non è corretto.