Sistemi di dimostrazione

Un sistema di deduzione (o dimostrazione) consiste di

- un insieme di assiomi (a volte vuoto)
- un insieme di **regole di inferenza**

Una **deduzione** (o derivazione) di una formula A da un insieme S di formule è un albero T (rappresentato con la radice in basso) dove

- la radice di T è A
- ogni foglia di T è un assioma o una formula di S
- ogni nodo che non sia una foglia è derivabile dai suoi genitori mediante una regola di inferenza

Notazione: $S \vdash A$ (o $S \vdash_X A$)
= A è derivabile da S (utilizzando il sistema di inferenza X)

Esempio: il sistema hilbertiano H per la logica proposizionale

Linguaggio proposizionale con $\rightarrow$ e $\neg$.

- Assiomi:
  A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  A3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$
- Regola di inferenza: $\dfrac{A \quad A \rightarrow B}{B}\ (MPP)$

Esempio di derivazione:

$$P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \vdash_H P \rightarrow R$$

$$\dfrac{P \rightarrow Q \qquad \dfrac{P \rightarrow Q \qquad \dfrac{Q \rightarrow R \quad [A1](Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}}{(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)}}{P \rightarrow R}$$

Deduzione automatica

Metodi di dimostrazione automatica: risolvono problemi della forma seguente:

Dato un insieme S di formule e una formula A, determinare se $S \models A$

La maggior parte dei metodi di deduzione automatica sono **metodi di refutazione**: anziché dimostrare direttamente che $S \models A$, si dimostra che $S \cup \{\neg A\}$ è un insieme insoddisfacibile (cioè che $S, \neg A \models \bot$).

Si basano sul seguente

Teorema: $S \models A$ sse $S \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile.

(già dimostrato)

Metodo di risoluzione: sistema di inferenza senza assiomi e con un'unica regola di inferenza.

Il metodo di risoluzione per la logica proposizionale

- Sistema di inferenza con una sola regola: la regola di risoluzione
- La regola di risoluzione si applica a **clausole** (disgiunzioni di **letterali**)

$$L_1 \vee L_2 \vee .... \vee L_k$$

dove $L_i = p_i$ oppure $L_i = \neg p$

Un **letterale** è un atomo o la negazione di un atomo
Una **clausola** è una disgiunzione di letterali

- Una clausola si può rappresentare mediante l'insieme dei suoi letterali

$$L_1 \vee L_2 \vee .... \vee L_k \implies \{L_1, L_2, ..., L_k\}$$

Regola di risoluzione proposizionale

$$\frac{C_1 \cup \{p\} \ ; \quad C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

$C_1 \cup C_2$ è il **risolvente**
p e $\neg p$ sono **letterali complementari**

Esempio

$$\neg p \vee q, p \vee r, \neg q \vee s \vdash_{Res} r \vee s$$

$$\dfrac{\dfrac{\{\neg p, q\} \quad \{p, r\}}{\{q, r\}} \qquad \{\neg q, s\}}{\{r, s\}} \qquad \text{Oppure:} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg p \vee q \quad p \vee r}{q \vee r} \qquad \neg q \vee s}{r \vee s}$$

$$\neg p \vee q, \neg q, p \vdash_{Res} \perp$$

$$\dfrac{\dfrac{\{\neg p, q\} \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}} \qquad \{p\}}{\emptyset} \qquad \qquad \dfrac{\dfrac{\neg p \vee q \quad \neg q}{\neg p} \qquad p}{\square}$$

$\square$ è la **clausola vuota** (il falso)

Teorema. La regola di risoluzione proposizionale è **corretta**:
se C è un risolvente di C_1 e C_2, allora $C_1, C_2 \models C$

Corollario. Il sistema di risoluzione proposizionale è corretto:

$$S \vdash_{Res} C \implies S \models C$$

Ma il sistema di risoluzione proposizionale non è completo rispetto alla derivabilità:

$$\not\vdash_{Res} p \vee \neg p$$

Completezza implicazionale: se $S \models C$ e C non è valida, allora esiste una clausola $C' \subseteq C$ (C' **sussume** C) tale che $S \vdash_{Res} C'$.

Il sistema di risoluzione come metodo di refutazione

$$S \models A \text{ sse } S \cup \{\neg A\} \text{ è insoddisfacibile}$$

Per dimostrare $S \models A$ si **refuta** $S \cup \{\neg A\}$, cioè si dimostra che $S \cup \{\neg A\} \vdash \bot$

Per "dimostrare" per risoluzione $S \models A$:

1. trasformare ogni formula C in $S \cup \{\neg A\}$ in **forma a clausole**:

$$\begin{array}{rcl} C & \Longrightarrow & (L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{k,1} \vee \ldots \vee L_{k,n_k}) \\ & \Longrightarrow & \{L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1}, \ldots, L_{k,1} \vee \ldots \vee L_{k,n_k}\} \\ & \Longrightarrow & \{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}, \ldots, \{L_{k,1}, \ldots, L_{k,n_k}\}\} \end{array}$$

2. Se S^* è l'insieme di clausole ottenute, dimostrare che:

$$S^* \vdash_{Res} \Box$$

Esempio

$$p \wedge q \to r, p \to q \models p \to r$$

1. Trasformazione in forma a clausole

$$\begin{array}{lll}
a) & p \wedge q \to r & \Longrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \\
 & & \Longrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r \\
 & & \Longrightarrow \{\neg p \vee \neg q \vee r\} \\
b) & p \to q & \Longrightarrow \neg p \vee q \\
 & & \Longrightarrow \{\neg p \vee q\} \\
c) & \neg(p \to r) & \Longrightarrow p \wedge \neg r \\
 & & \Longrightarrow \{p, \neg r\}
\end{array}$$

$$S = \{\neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee q, p, \neg r\}$$

2. Derivazione della clausola vuota:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p \vee \neg q \vee r \quad \neg r}{\neg p \vee \neg q} \quad \dfrac{\neg p \vee q \quad p}{q}}{\neg p} \qquad p}{\square}$$

Completezza refutazionale della risoluzione proposizionale

Se $S \models A$ allora $S \cup \{\neg A\} \vdash_{Res} \Box$

cioè: se $S \models A$ allora esiste una derivazione per risoluzione di $\Box$ dalla forma a clausole di $S \cup \{\neg A\}$.

Quindi: se S è un insieme di clausole:

$$S \text{ è insoddisfacibile sse } S \vdash_{Res} \Box$$

Il metodo di risoluzione per la logica del primo ordine

Forme normali prenesse

$$\underbrace{Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n}_{\textit{prefisso}} \underbrace{A}_{\textit{matrice}}$$

la matrice è senza quantificatori.

Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in forma normale prenessa.

Forme normali di Skolem

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n A \quad A \text{ senza quantificatori}$$

Trasformazione di una formula in forma di Skolem (**“skolemizzazione”**):

1. Trasformazione in forma prenessa: $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n A$
2. Eliminazione dei quantificatori esistenziali:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y A \Longrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n A[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$$

dove $\forall x_1, \ldots, \forall x_n$ sono tutti i quantificatori universali che precedono $\exists y$ e f è un simbolo funzionale **nuovo** (***funzione di skolem***)

Esempio

$$\exists \mathbf{x} \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v \; p(\mathbf{x}, y, z, u, w, v)$$

Esempio

$$\exists \mathbf{x} \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v \; p(\mathbf{x}, y, z, u, w, v)$$

$$\Rightarrow \quad \forall y \forall z \exists \mathbf{u} \forall w \exists v \; p(\mathbf{c}, y, z, \mathbf{u}, w, v)$$

Esempio

$$\exists \mathbf{x} \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v \; p(\mathbf{x}, y, z, u, w, v)$$

$$\Rightarrow \quad \forall y \forall z \exists \mathbf{u} \forall w \exists v \; p(\mathbf{c}, y, z, \mathbf{u}, w, v)$$

$$\Rightarrow \quad \forall y \forall z \forall w \exists \mathbf{v} \; p(c, y, z, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), w, \mathbf{v})$$

Esempio

$$\exists \mathbf{x} \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v \; p(\mathbf{x}, y, z, u, w, v)$$

$$\Rightarrow \quad \forall y \forall z \exists \mathbf{u} \forall w \exists v \; p(\mathbf{c}, y, z, \mathbf{u}, w, v)$$

$$\Rightarrow \quad \forall y \forall z \forall w \exists \mathbf{v} \; p(c, y, z, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), w, \mathbf{v})$$

$$\Rightarrow \quad \forall y \forall z \forall w \; p(c, y, z, f(y, z), w, \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}))$$

dove c, f, g sono simboli ***nuovi***

$$\forall x \exists y \, p(x, y) \Longrightarrow \forall x \, p(x, f(x))$$

y “dipende” da x

$$\exists y \forall x \, p(x, y) \Longrightarrow \forall x \, p(x, c)$$

y non dipende da x

Forma a clausole

1. Trasformare A in forma normale di Skolem
2. Eliminare i quantificatori universali
3. Trasformare la matrice in forma normale congiuntiva
4. Trasformare in insieme di clausole

Esempio

$$\forall x\, \exists y \exists z\, (\neg p(x,y) \vee \neg(r(x,y,z) \rightarrow q(x,z)))$$

Forma a clausole

1. Trasformare A in forma normale di Skolem
2. Eliminare i quantificatori universali
3. Trasformare la matrice in forma normale congiuntiva
4. Trasformare in insieme di clausole

Esempio

$$\forall x\, \exists y \exists z\, (\neg p(x,y) \vee \neg(r(x,y,z) \rightarrow q(x,z)))$$

$$\Rightarrow \quad \neg p(x,f(x)) \vee \neg(r(x,f(x),g(x)) \rightarrow q(x,g(x)))$$

Forma a clausole

1. Trasformare A in forma normale di Skolem
2. Eliminare i quantificatori universali
3. Trasformare la matrice in forma normale congiuntiva
4. Trasformare in insieme di clausole

Esempio

$$\forall x\, \exists y \exists z\, (\neg p(x,y) \vee \neg(r(x,y,z) \rightarrow q(x,z)))$$

$$\Rightarrow \quad \neg p(x, f(x)) \vee \neg(r(x, f(x), g(x)) \rightarrow q(x, g(x)))$$

$$\Rightarrow \quad \neg p(x, f(x)) \vee (r(x, f(x), g(x)) \wedge \neg q(x, g(x)))$$

Forma a clausole

1. Trasformare A in forma normale di Skolem
2. Eliminare i quantificatori universali
3. Trasformare la matrice in forma normale congiuntiva
4. Trasformare in insieme di clausole

Esempio

$$\forall x\, \exists y \exists z\, (\neg p(x,y) \vee \neg(r(x,y,z) \rightarrow q(x,z)))$$

$$\Rightarrow \quad \neg p(x, f(x)) \vee \neg(r(x, f(x), g(x)) \rightarrow q(x, g(x)))$$

$$\Rightarrow \quad \neg p(x, f(x)) \vee (r(x, f(x), g(x)) \wedge \neg q(x, g(x)))$$

$$\Rightarrow \quad (\neg p(x, f(x)) \vee r(x, f(x), g(x))) \wedge (\neg p(x, f(x)) \vee \neg q(x, g(x)))$$

$$\Rightarrow \quad \{\neg p(x, f(x)) \vee r(x, f(x), g(x)), \neg p(x, f(x)) \vee \neg q(x, g(x))\}$$

N.B: Le variabili libere si intendono quantificate universalmente; se A è una formula con le variabili libere $x_1, \ldots, x_n$, A sta per la sua "chiusura universale" $\forall x_1, \ldots, \forall x_n A$
Denotiamo con $\forall A$ la chiusura universale di A

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \land e(x)),$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \land e(x)),\ \exists x(b(x) \land \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \ \models$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)),\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \models \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \to a(y,x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)),\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x,y))) \models \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y,x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \wedge e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0),\ e(c_0)\}$$

$$\exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x,y))) \quad \Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \land e(x)),\ \exists x(b(x) \land \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \models \exists x(b(x) \land \neg\forall y(b(y) \to a(y,x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \land e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \land e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0),\ e(c_0)\}$$

$$\exists x(b(x) \land \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \quad \Rightarrow \exists x \forall y(b(x) \land (\neg e(y) \lor \neg a(x,y)))$$

$$\Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \land e(x)),\ \exists x(b(x) \land \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \models \exists x(b(x) \land \neg \forall y(b(y) \to a(y,x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \land e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \land e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0),\ e(c_0)\}$$

$$\exists x(b(x) \land \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \quad \Rightarrow \exists x \forall y(b(x) \land (\neg e(y) \lor \neg a(x,y)))$$
$$\Rightarrow b(c_1) \land (\neg e(y) \lor \neg a(c_1,y)) \quad \Rightarrow \{b(c_1),\ \neg e(y) \lor \neg a(c_1,y)\}$$

$$\neg\, \exists x(b(x) \land \neg \forall y(b(y) \to a(y,x))) \qquad \Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \land e(x)),\ \exists x(b(x) \land \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \models$$
$$\exists x(b(x) \land \neg \forall y(b(y) \to a(y,x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \land e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \land e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0),\ e(c_0)\}$$

$$\exists x(b(x) \land \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \quad \Rightarrow \exists x \forall y(b(x) \land (\neg e(y) \lor \neg a(x,y)))$$
$$\Rightarrow b(c_1) \land (\neg e(y) \lor \neg a(c_1,y)) \quad \Rightarrow \{b(c_1),\ \neg e(y) \lor \neg a(c_1,y)\}$$

$$\neg\, \exists x(b(x) \land \neg \forall y(b(y) \to a(y,x))) \quad \Rightarrow \forall x \neg(b(x) \land \exists y \neg(b(y) \to a(y,x)))$$
$$\Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)),\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x,y))) \models$$
$$\exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y,x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \wedge e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0),\ e(c_0)\}$$

$$\exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x,y))) \quad \Rightarrow \exists x \forall y(b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x,y)))$$
$$\Rightarrow b(c_1) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(c_1,y)) \quad \Rightarrow \{b(c_1),\ \neg e(y) \vee \neg a(c_1,y)\}$$

$$\neg\, \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y,x))) \quad \Rightarrow \forall x \neg(b(x) \wedge \exists y \neg(b(y) \rightarrow a(y,x)))$$
$$\Rightarrow \forall x \neg \exists y(b(x) \wedge \neg(b(y) \rightarrow a(y,x))) \quad \Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)),\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x,y))) \models \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y,x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \wedge e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0),\ e(c_0)\}$$

$$\exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x,y))) \Rightarrow \exists x \forall y(b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x,y)))$$
$$\Rightarrow b(c_1) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(c_1,y)) \Rightarrow \{b(c_1),\ \neg e(y) \vee \neg a(c_1,y)\}$$

$$\neg \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y,x))) \Rightarrow \forall x \neg(b(x) \wedge \exists y \neg(b(y) \rightarrow a(y,x)))$$
$$\Rightarrow \forall x \neg \exists y(b(x) \wedge \neg(b(y) \rightarrow a(y,x))) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(b(x) \wedge \neg(b(y) \rightarrow a(y,x)))$$
$$\Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \land e(x)),\ \exists x(b(x) \land \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \models \exists x(b(x) \land \neg\forall y(b(y) \to a(y,x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \land e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \land e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0),\ e(c_0)\}$$

$$\exists x(b(x) \land \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \quad \Rightarrow \exists x \forall y(b(x) \land (\neg e(y) \lor \neg a(x,y)))$$
$$\Rightarrow b(c_1) \land (\neg e(y) \lor \neg a(c_1,y)) \quad \Rightarrow \{b(c_1),\ \neg e(y) \lor \neg a(c_1,y)\}$$

$$\neg\ \exists x(b(x) \land \neg\forall y(b(y) \to a(y,x))) \quad \Rightarrow \forall x \neg(b(x) \land \exists y \neg(b(y) \to a(y,x)))$$
$$\Rightarrow \forall x \neg\exists y(b(x) \land \neg(b(y) \to a(y,x))) \quad \Rightarrow \forall x \forall y \neg(b(x) \land \neg(b(y) \to a(y,x)))$$
$$\Rightarrow \neg b(x) \lor (b(y) \to a(y,x)) \quad \Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche. Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)),\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \ \models \ \exists x(b(x) \wedge \neg\forall y(b(y) \to a(y,x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \wedge e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0),\ e(c_0)\}$$

$$\exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \quad \Rightarrow \exists x \forall y(b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x,y)))$$
$$\Rightarrow b(c_1) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(c_1,y)) \quad \Rightarrow \{b(c_1),\ \neg e(y) \vee \neg a(c_1,y)\}$$

$$\neg\ \exists x(b(x) \wedge \neg\forall y(b(y) \to a(y,x))) \quad \Rightarrow \forall x \neg(b(x) \wedge \exists y \neg(b(y) \to a(y,x)))$$
$$\Rightarrow \forall x \neg\exists y(b(x) \wedge \neg(b(y) \to a(y,x))) \quad \Rightarrow \forall x \forall y \neg(b(x) \wedge \neg(b(y) \to a(y,x)))$$
$$\Rightarrow \neg b(x) \vee (b(y) \to a(y,x)) \quad \Rightarrow \neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y,x)$$
$$\Rightarrow \{\neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y,x)\}$$

L'insieme di clausole che si ottiene è:

$$\{b(c_0),\ e(c_0),\ b(c_1),\ \neg e(y) \vee \neg a(c_1,y),\ \neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y,x)\}$$

Che relazione c'è tra *A* e la sua forma a clausole?

$A \quad \Longrightarrow$ forma prenessa

1. Se *pre*(A) è una forma prenessa di A, allora $A \leftrightarrow pre(A)$

Che relazione c'è tra *A* e la sua forma a clausole?

$$
\begin{aligned}
A \quad & \Longrightarrow \text{forma prenessa} \\
& \Longrightarrow \text{forma di Skolem}
\end{aligned}
$$

1. Se $pre(A)$ è una forma prenessa di A, allora $A \leftrightarrow pre(A)$
2. ???

Che relazione c'è tra *A* e la sua forma a clausole?

$A \quad \Longrightarrow$ forma prenessa
$\Longrightarrow$ forma di Skolem
$\Longrightarrow$ forma di Skolem con matrice in FNC

1. Se $pre(A)$ è una forma prenessa di A, allora $A \leftrightarrow pre(A)$
2. ???
3. Se $FNC(A)$ è una forma normale congiuntiva di A, allora $\forall x_1 ... \forall x_n A \leftrightarrow \forall x_1 ... \forall x_n FNC(A)$

Che relazione c'è tra A e la sua forma a clausole?

$A \quad \Longrightarrow$ forma prenessa
$\Longrightarrow$ forma di Skolem
$\Longrightarrow$ forma di Skolem con matrice in FNC
$\Longrightarrow$ eliminazione dei $\forall$

1. Se $pre(A)$ è una forma prenessa di A, allora $A \leftrightarrow pre(A)$
2. ???
3. Se $FNC(A)$ è una forma normale congiuntiva di A, allora $\forall x_1 ... \forall x_n A \leftrightarrow \forall x_1 ... \forall x_n FNC(A)$
4. Eliminazione dei quantificatori universali: A sta per $\forall x_1 ... \forall x_n A$

Che relazione c'è tra A e la sua forma a clausole?

$A \Longrightarrow$ forma prenessa
$\Longrightarrow$ forma di Skolem
$\Longrightarrow$ forma di Skolem con matrice in FNC
$\Longrightarrow$ eliminazione dei $\forall$
$\Longrightarrow$ insieme di clausole

1. Se $pre(A)$ è una forma prenessa di A, allora $A \leftrightarrow pre(A)$
2. ???
3. Se $FNC(A)$ è una forma normale congiuntiva di A, allora $\forall x_1 ... \forall x_n A \leftrightarrow \forall x_1 ... \forall x_n FNC(A)$
4. Eliminazione dei quantificatori universali: A sta per $\forall x_1 ... \forall x_n A$
5. $\forall x_1 ... \forall x_n (C_1 \wedge ... \wedge C_k) \leftrightarrow \forall x_1 ... \forall x_n C_1 \wedge ... \wedge \forall x_1 ... \forall x_n C_k$
   Un insieme di formule S sta per la congiunzione delle formule in S, quindi $\forall x_1 ... \forall x_n (C_1 \wedge ... \wedge C_k)$ equivale a $\{\forall x_1 ... \forall x_n C_1, ..., \forall x_1 ... \forall x_n C_k\}$, cioè $\{C_1, ..., C_k\}$

A e $sk(A)$ non sono equivalenti

Se $sk(A)$ è una forma di Skolem di A

$$\not\models A \equiv sk(A)$$

$$\boxed{\models sk(A) \rightarrow A}$$

Sia $A = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y A[x_1, \dots, x_n, y]$ e $sk(A) = \forall x_1 \dots \forall x_n A[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$

$\mathcal{M} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$

$\Rightarrow$ per ogni s e $d_1, \dots, d_n \in D$:
$(\mathcal{M}, s[d_1/x_1, \dots, d_n/x_n]) \models A[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$

$\Rightarrow$ per ogni s e $d_1, \dots, d_n \in D$: $(\mathcal{M}, s[d_1/x_1, \dots, d_n/x_n]) \models \exists y A[x_1, \dots, x_n, y]$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y A[x_1, \dots, x_n, y]$

A e $sk(A)$ non sono equivalenti

Se $sk(A)$ è una forma di Skolem di A

$$\not\models A \equiv sk(A)$$

$$\boxed{\models sk(A) \rightarrow A}$$

Sia $A = \forall x_1 ... \forall x_n \exists y A[x_1, \ldots, x_n, y]$ e $sk(A) = \forall x_1 ... \forall x_n A[x_1, \ldots, x_n, f(x_1, ..., x_n)]$

$\mathcal{M} \models \forall x_1 ... \forall x_n A[x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)]$

$\Rightarrow$ per ogni s e $d_1, ..., d_n \in D$:
$(\mathcal{M}, s[d_1/x_1, ..., d_n/x_n]) \models A[x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)]$

$\Rightarrow$ per ogni s e $d_1, ..., d_n \in D$: $(\mathcal{M}, s[d_1/x_1, ..., d_n/x_n]) \models \exists y A[x_1, ..., x_n, y]$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \forall x_1 ... \forall x_n \exists y A[x_1, ..., x_n, y]$

Ma $\boxed{\not\models A \rightarrow sk(A)}$

Sia $A = \exists x\, p(x)$, $sk(A) = p(c)$
Consideriamo $\mathcal{M}$ con $D = \{1, 2\}$, $\mathcal{M}(c) = 1$, $\mathcal{M}(p) = \{2\}$
Chiaramente: $\mathcal{M} \models \exists x\, p(x)$, ma $\mathcal{M} \not\models p(c)$

Relazione tra A e $sk(A)$

Tuttavia A è soddisfacibile $\Longrightarrow$ $sk(A)$ è soddisfacibile

Quindi **la skolemizzazione conserva la *soddisfacibilità***

$$\boxed{A \text{ è soddisfacibile} \Longleftrightarrow sk(A) \text{ è soddisfacibile}}$$

(poichè $\models sk(A) \rightarrow A$: $sk(A)$ soddisfacibile $\Longrightarrow$ A soddisfacibile)

Questo è quel che interessa per i metodi di prova per refutazione:

$$\begin{array}{lll} S \models A & \Leftrightarrow & S \cup \{\neg A\} \text{ è insoddisfacibile} \\ & \Leftrightarrow & \text{la forma a clausole di } S \cup \{\neg A\} \text{ è insoddisfacibile} \end{array}$$

Teorema

- A è insoddisfacibile sse la sua forma a clausole è insoddisfacibile
- se S è un insieme di formule e S' è ottenuto trasformando ogni formula in S in forma clausale, allora S è insoddisfacibile sse S' è insoddisfacibile.

Il metodo di risoluzione controlla l'insoddisfacibilità di insiemi di clausole

Regola di risoluzione

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \quad C_2 \cup \{\neg Q\}}{C_1\theta \cup C_2\theta} \qquad \text{se } \theta = mgu(P, Q)$$

$C_1\theta \cup C_2\theta$ è un **risolvente binario** di $C_1 \cup \{P\}$ e $C_2 \cup \{\neg Q\}$.

Esempio:

$$\frac{p(x) \vee q(x) \quad \neg p(f(y)) \vee r(y)}{q(f(y)) \vee r(y)} \qquad \theta = [f(y)/x]$$

La regola di risoluzione al primo ordine combina l'istanziazione di variabili (universali) con la regola di risoluzione proposizionale:

$$\frac{\dfrac{p(x) \vee q(x)}{p(f(y)) \vee q(f(y))}\ IST \qquad \neg p(f(y)) \vee r(y)}{q(f(y)) \vee r(y)}$$

Ridenominazione delle variabli

Si può assumere che le due **clausole "genitrici"** non abbiano variabili in comune: quando una clausola viene usata, si rinominano le sue variabili (***standardizing apart***), ottenendo una **variante** della clausola.

Rinominare le variabili in una clausola = rinominare variabili quantificate universalmente

Esempio: la regola di risoluzione si può applicare alle clausole $p(x) \vee q(x)$ e $\neg p(f(x)) \vee r(x)$: in una delle due clausole (o entrambe) la x viene ridenominata:

$$\frac{p(x_1) \vee q(x_1) \quad p(f(x_2)) \vee r(x_2)}{q(f(x_2)) \vee r(x_2)} \qquad \theta = \{f(x_2)/x_1\}$$

Ridenominazione delle variabli

Si può assumere che le due **clausole "genitrici"** non abbiano variabili in comune: quando una clausola viene usata, si rinominano le sue variabili (***standardizing apart***), ottenendo una **variante** della clausola.

Rinominare le variabili in una clausola = rinominare variabili quantificate universalmente

Esempio: la regola di risoluzione si può applicare alle clausole $p(x) \vee q(x)$ e $\neg p(f(x)) \vee r(x)$: in una delle due clausole (o entrambe) la x viene ridenominata:

$$\frac{p(x_1) \vee q(x_1) \quad p(f(x_2)) \vee r(x_2)}{q(f(x_2)) \vee r(x_2)} \quad \theta = \{f(x_2)/x_1\}$$

Confronta:

$$\frac{p(c) \vee q(x) \quad \neg p(x) \vee r(x)}{q(c) \vee r(c)} \; \theta = \{c/x\}$$

Ridenominazione delle variabli

Si può assumere che le due **clausole "genitrici"** non abbiano variabili in comune: quando una clausola viene usata, si rinominano le sue variabili (***standardizing apart***), ottenendo una **variante** della clausola.

Rinominare le variabili in una clausola = rinominare variabili quantificate universalmente

Esempio: la regola di risoluzione si può applicare alle clausole $p(x) \vee q(x)$ e $\neg p(f(x)) \vee r(x)$: in una delle due clausole (o entrambe) la x viene ridenominata:

$$\frac{p(x_1) \vee q(x_1) \quad p(f(x_2)) \vee r(x_2)}{q(f(x_2)) \vee r(x_2)} \quad \theta = \{f(x_2)/x_1\}$$

Confronta:

$$\frac{p(c) \vee q(x) \quad \neg p(x) \vee r(x)}{q(c) \vee r(c)} \quad \theta = \{c/x\}$$

$$\frac{p(c) \vee q(x_1) \quad \neg p(x) \vee r(x)}{q(x_1) \vee r(c)} \quad \theta = \{c/x\}$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6: dimostrazione

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)),\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \to \neg a(x,y))) \models \exists x(b(x) \wedge \neg\forall y(b(y) \to a(y,x)))$$

se e solo se

$$b(c_0),\ e(c_0),\ b(c_1),\ \neg e(y) \vee \neg a(c_1,y),\ \neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y,x) \vdash_{Res} \Box$$

$$\dfrac{e(c_0) \qquad \dfrac{\neg e(y_2) \vee \neg a(c_1,y_2) \qquad \dfrac{b(c_1) \qquad \dfrac{b(c_0) \qquad \neg b(x_1) \vee \neg b(y_1) \vee a(y_1,x_1)}{\neg b(y_1) \vee a(y_1,c_0)}\ \{c_0/x_1\}}{a(c_1,c_0)}\ \{c_1/y_1\}}{\neg e(c_0)}\ \{c_0/y_2\}}{\Box}$$

Scrittura lineare

(senza ridenominazione delle variabili, che in questo caso non serve)

1.	$b(c_0)$	*in S*
2.	$e(c_0)$	*in S*
3.	$b(c_1)$	*in S*
4.	$\neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)$	*in S*
5.	$\neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y, x)$	*in S*
6.	$\neg b(y) \vee a(y, c_0)$	$Res(1, 5), \{c_0/x\}$
7.	$a(c_1, c_0)$	$Res(3, 6), \{c_1/y\}$
8.	$\neg e(c_0)$	$Res(4, 7), \{c_0/y\}$
9.	$\square$	$Res(2, 8)$

Esempio

1. Alcuni funzionari di dogana hanno perquisito tutti coloro che sono entrati nel paese, ad eccezione dei VIP.
2. Alcuni spacciatori di droga sono entrati nel paese e sono stati perquisiti solo da spacciatori di droga.
3. Nessuno spacciatore è un VIP.
4. Quindi alcuni funzionari sono spacciatori di droga.

Rappresentazione

$\mathcal{L}$:	$E(x)$	x è entrato nel paese
	$V(x)$	x è un VIP
	$P(x,y)$	y ha perquisito x
	$F(x)$	x è un funzionario di dogana
	$S(x)$	x è uno spacciatore di droga

1. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x,y)))$
2. $\exists x(S(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(P(x,y) \rightarrow S(y)))$
3. $\forall x(S(x) \rightarrow \neg V(x))$
4. $\exists x(F(x) \wedge S(x))$

Trasformazione in clausole

1. $\forall x(E(x) \land \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \land P(x, y)))$

$\Rightarrow$

Trasformazione in clausole

1. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x \exists y(\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x,y)))$

$\Rightarrow$

Trasformazione in clausole

1. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x \exists y(\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x(\neg E(x) \vee V(x) \vee (F(f(x)) \wedge P(x,f(x))))$

$\Rightarrow$

Trasformazione in clausole

1. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x \exists y(\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x(\neg E(x) \vee V(x) \vee (F(f(x)) \wedge P(x,f(x))))$

$\Rightarrow \quad (\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x))) \wedge (\neg E(x) \vee V(x) \vee P(x,f(x)))$

$\Rightarrow \quad \{\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x)),\ \neg E(x) \vee V(x) \vee P(x,f(x))\}$

2. $\exists x(S(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(P(x,y) \rightarrow S(y)))$

$\Rightarrow$

Trasformazione in clausole

1. $\forall x(E(x) \land \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \land P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x \exists y(\neg(E(x) \land \neg V(x)) \lor (F(y) \land P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x(\neg E(x) \lor V(x) \lor (F(f(x)) \land P(x,f(x))))$

$\Rightarrow \quad (\neg E(x) \lor V(x) \lor F(f(x))) \land (\neg E(x) \lor V(x) \lor P(x,f(x)))$

$\Rightarrow \quad \{\neg E(x) \lor V(x) \lor F(f(x)),\ \neg E(x) \lor V(x) \lor P(x,f(x))\}$

2. $\exists x(S(x) \land E(x) \land \forall y(P(x,y) \rightarrow S(y)))$

$\Rightarrow \quad \exists x \forall y(S(x) \land E(x) \land (\neg P(x,y) \lor S(y)))$

$\Rightarrow$

Trasformazione in clausole

1. $\forall x(E(x) \land \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \land P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x \exists y(\neg(E(x) \land \neg V(x)) \lor (F(y) \land P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x(\neg E(x) \lor V(x) \lor (F(f(x)) \land P(x, f(x))))$

$\Rightarrow \quad (\neg E(x) \lor V(x) \lor F(f(x))) \land (\neg E(x) \lor V(x) \lor P(x, f(x)))$

$\Rightarrow \quad \{\neg E(x) \lor V(x) \lor F(f(x)),\ \neg E(x) \lor V(x) \lor P(x, f(x))\}$

2. $\exists x(S(x) \land E(x) \land \forall y(P(x,y) \rightarrow S(y)))$

$\Rightarrow \quad \exists x \forall y(S(x) \land E(x) \land (\neg P(x,y) \lor S(y)))$

$\Rightarrow \quad S(a) \land E(a) \land (\neg P(a,y) \lor S(y))$

$\Rightarrow \quad \{S(a), E(a),\ \neg P(a,y) \lor S(y)\}$

3. $\forall x(S(x) \rightarrow \neg V(x))$

$\Rightarrow$

Trasformazione in clausole

1. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x \exists y(\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x,y)))$

$\Rightarrow \quad \forall x(\neg E(x) \vee V(x) \vee (F(f(x)) \wedge P(x,f(x))))$

$\Rightarrow \quad (\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x))) \wedge (\neg E(x) \vee V(x) \vee P(x,f(x)))$

$\Rightarrow \quad \{\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x)),\ \neg E(x) \vee V(x) \vee P(x,f(x))\}$

2. $\exists x(S(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(P(x,y) \rightarrow S(y)))$

$\Rightarrow \quad \exists x \forall y(S(x) \wedge E(x) \wedge (\neg P(x,y) \vee S(y)))$

$\Rightarrow \quad S(a) \wedge E(a) \wedge (\neg P(a,y) \vee S(y))$

$\Rightarrow \quad \{S(a), E(a),\ \neg P(a,y) \vee S(y)\}$

3. $\forall x(S(x) \rightarrow \neg V(x))$

$\Rightarrow \quad \forall x(\neg S(x) \vee \neg V(x))$

$\Rightarrow \quad \{\neg S(x) \vee \neg V(x)\}$

$\neg(4).\ \neg \exists x(F(x) \wedge S(x))$

$\Rightarrow$

Trasformazione in clausole

1. $\forall x(E(x) \land \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \land P(x,y)))$
$\Rightarrow \quad \forall x \exists y(\neg(E(x) \land \neg V(x)) \lor (F(y) \land P(x,y)))$
$\Rightarrow \quad \forall x(\neg E(x) \lor V(x) \lor (F(f(x)) \land P(x, f(x))))$
$\Rightarrow \quad (\neg E(x) \lor V(x) \lor F(f(x))) \land (\neg E(x) \lor V(x) \lor P(x, f(x)))$
$\Rightarrow \quad \{\neg E(x) \lor V(x) \lor F(f(x)),\ \neg E(x) \lor V(x) \lor P(x, f(x))\}$

2. $\exists x(S(x) \land E(x) \land \forall y(P(x,y) \rightarrow S(y)))$
$\Rightarrow \quad \exists x \forall y(S(x) \land E(x) \land (\neg P(x,y) \lor S(y)))$
$\Rightarrow \quad S(a) \land E(a) \land (\neg P(a,y) \lor S(y))$
$\Rightarrow \quad \{S(a), E(a),\ \neg P(a,y) \lor S(y)\}$

3. $\forall x(S(x) \rightarrow \neg V(x))$
$\Rightarrow \quad \forall x(\neg S(x) \lor \neg V(x))$
$\Rightarrow \quad \{\neg S(x) \lor \neg V(x)\}$

$\neg(4).\ \neg \exists x(F(x) \land S(x))$
$\Rightarrow \quad \forall x \neg(F(x) \land S(x))$
$\Rightarrow \quad \{\neg F(x) \lor \neg S(x)\}$

Refutazione

Dimostrazione per risoluzione da S:

1.	$\neg E(x_1) \vee V(x) \vee F(f(x_1))$	*in S*
2.	$\neg E(x_2) \vee V(x) \vee P(x_2, f(x_2))$	*in S*
3.	$S(a)$	*in S*
4.	$E(a)$	*in S*
5.	$\neg P(a, y_1) \vee S(y_1)$	*in S*
6.	$\neg S(x_3) \vee \neg V(x_3)$	*in S*
7.	$\neg F(x_4) \vee \neg S(x_4)$	*in S*
8.	$V(a) \vee P(a, f(a))$	$Res(2, 4), \{a/x_2\}$
9.	$\neg V(a)$	$Res(3, 6), \{a/x_3\}$
10.	$P(a, f(a))$	$Res(8, 9)$
11.	$S(f(a))$	$Res(5, 10), \{f(a)/y_1\}$
12.	$\neg F(f(a))$	$res(7, 11), \{f(a)/x_4\}$
13.	$V(a) \vee F((f(a))$	$Res(1, 4), \{a/x_1\}$
14.	$F(f(a))$	$Res(9, 13)$
15.	$\square$	$Res(12, 14)$

Albero di dimostrazione

$$\dfrac{\dfrac{(7) \quad \dfrac{(5) \quad \dfrac{\dfrac{(2) \quad (4)}{V(a) \lor P(a, f(a))} \quad \dfrac{(3) \quad (6)}{\neg V(a)}}{P(a, f(a))}}{S(f(a))}}{\neg F(f(a))} \qquad \dfrac{\dfrac{(3) \quad (6)}{\neg V(a)} \quad \dfrac{(1) \quad (4)}{V(a) \lor F(f(a))}}{F(f(a))}}{\square}$$

Fattorizzazione

$$S = \{p(x) \vee p(y),\ \neg p(c) \vee \neg p(z)\}$$

è insoddisfacibile, ma ogni clausola derivabile mediante la regola di risoluzione, come è stata formulata fin qui, contiene due letterali. Quindi la clausola vuota non è derivabile.

Definizione. Se $C = C' \cup D$ e esiste un mgu θ per D, allora $C\theta$ è un **fattore** di C.

Esempio: $p(f(y)) \vee r(f(y), y)$ è un fattore di $p(x) \vee p(f(y)) \vee r(x, y)$.

Una clausola è sempre un fattore (banale) di se stessa.

Definizione: Un **risolvente** di C_1 e C_2 è un risolvente binario di un fattore di C_1 e di un fattore di C_2.

Regola di risoluzione

Se

$C_1' \cup \{P\}$ è un fattore di C_1
$C_2' \cup \{\neg Q\}$ è un fattore di C_2
θ è un $mgu(P, Q)$

allora:

$$\frac{C_1 \quad C_2}{C_1'\theta \cup C_2'\theta}$$

Esempio:

$$\frac{p(x) \vee p(y) \quad \neg p(c) \vee \neg p(z)}{\Box}$$

$p(x)$ è un fattore di $p(x) \vee p(y)$
$\neg p(c)$ è un fattore di $\neg p(c) \vee \neg p(z)$

Esercizi

Risovere gli esercizi seguenti, utilizzando, dove appropriato, il metodo di risoluzione:

- 4, 6, 7, 10 pag. 23-26 delle Dispense (usare la risoluzione per le formule valide o i ragionamenti corretti)
- L, N, O pag. 67-68 (usare la risoluzione per i ragionamenti corretti).
- 8 pag. 105