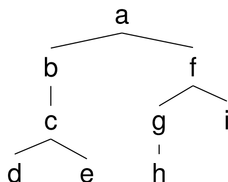
Alberi binari




```
/* is_tree(T) :
   T e' un albero binario */
is_tree(empty).
is_tree(t(_,Left,Right)) :-
        is_tree(Left),
        is_tree(Right).
```

```
t(a,t(b,t(c,t(d,empty,empty),t(e,empty,empty)),empty),
    t(f,t(g,t(h,empty,empty),empty),t(i,empty,empty)))
```

Notare l’uso della “variabile muta” (o “anonima”)

Occorrenza di un elemento in un albero binario

```
/* in_tree(El,T): El occorre come etichetta in T */
%% caso base: El occorre in un albero che ha El come radice
in_tree(El,t(El,_, _)).  %% uso dell'unificazione
%% casi ricorsivi: El occorre in un albero se occorre
%% nel suo sottoalbero sinistro o in quello destro
in_tree(El,t(_,Left, _)) :-
    in_tree(El,Left).
in_tree(El, t(_,_,Right)) :-
    in_tree(El,Right).
```

Le ultime due clausole si possono compattare usando l'OR del Prolog:

```
in_tree(El,t(_,Left,Right)) :-
    in_tree(El,Left) ; in_tree(El,Right).
```

Il programma è reversibile?

```
in_tree(El,t(El,_, _)).
in_tree(El,t(_,Left,Right)) :-
    in_tree(El,Left) ; in_tree(El,Right).

?- in_tree(X,t(b,t(c,t(d,empty,empty),
                    t(e,empty,empty)),empty)).
X = b ;
X = c ;
X = d ;
X = e ;
false.
```

Il programma è reversibile?

```
in_tree(El,t(El,_, _)).
in_tree(El,t(_,Left,Right)) :-
    in_tree(El,Left) ; in_tree(El,Right).

?- in_tree(X,t(b,t(c,t(d,empty,empty),
                     t(e,empty,empty)),empty)).
X = b ;
X = c ;
X = d ;
X = e ;
false.

?- in_tree(a,T).
T = t(a, _G278, _G279) ;
T = t(_G277, t(a, _G282, _G283), _G279) ;
T = t(_G277, t(_G281, t(a, _G286, _G287), _G283), _G279) ;
...
```

Procedure con input/output determinati

Notation of Predicate Descriptions

- \+ Argument must be fully instantiated. Think of the argument as input.
- \- Argument must be unbound. Think of the argument as output.
- ? Think of the argument as either input or output or both input and output.

```
/*  size(+T,?N): T ha N nodi */
size(empty,0).
size(t(_,Left,Right),H) :-
        size(Left,N), size(Right,M), H is N+M+1.

/*  height(+T,?N): T ha altezza N */
height(empty,0).
height(t(_,Left,Right),H) :-
        height(Left,N), height(Right,M),
        (N>M, H is N+1 ; N=<M, H is M+1).
```

Liste

Una lista è una sequenza finita di elementi.

Esempi:

```
[antonio, vittorio, tommaso]
[antonio, 2, 3.0]
[antonio, padre(antonio), X, Y]
[]                                        (la lista vuota)
[antonio, [2, [b,c]], f(X), [] ]
```

Una lista non vuota si può vedere come composta di due parti:

- testa: primo elemento della lista
- coda: la lista che si ottiene eliminando il primo elemento

```
[antonio, [2, [b,c]], f(X), [] ]
    testa: antonio
    coda: [[2, [b,c]], f(X), [] ]
```

L'operatore predefinito |

L'operatore | si può usare per decomporre una lista nella sua testa e coda

```
?- [Testa|Coda] = [antonio, vittorio, tommaso].
Testa = antonio,
Coda = [vittorio, tommaso].

?- [Testa|Coda] = [antonio, [2, [b,c]], f(X), [] ].
Testa = antonio,
Coda = [[2, [b, c]], f(X), []].

?- [Testa|Coda] = [].
false.

?- [Uno,Due|Resto] = [antonio, [2, [b,c]], f(X), [] ].
Uno = antonio,
Due = [2, [b, c]],
Resto = [f(X), []].
```

Predicati predefiniti sulle liste: member

Guardare sul manuale SWI: library(lists): List Manipulation:
http://www.swi-prolog.org/pldoc/man?section=lists

member(?Elem, ?List): True if Elem is a member of List.

```
%% mem = member
mem(X,[X|_]).
mem(X,[_|Coda]) :- mem(X,Coda).

?- member(X,[a,b,c]).
X = a ;
X = b ;
X = c.
```

Predicati predefiniti sulle liste: length

length(?List, ?Int) True if Int represents the number of elements in List.

```
%% lung = length (pressappoco)
lung([],0).
lung([_|Coda],N) :- length(Coda,M), N is M+1.
```

Attenzione: length è un predicato

```
/* sum_of_lung(+L,?N) = L e' una lista di liste e N e'
          la somma delle lunghezze delle liste  in L */
sum_of_lung([],0).
sum_of_lung([Prima|Resto],N) :-
        length(Prima,P), sum_of_lung(Resto,R), N is P+R.
```

length è reversibile, ma attenzione:

```
?- member(a,L), length(L,3).
L = [a, _G330, _G333] ;
L = [_G327, a, _G333] ;
L = [_G327, _G330, a] ;
ERROR: Out of global stack
```

Predicati predefiniti sulle liste: append

append(?List1, ?List2, ?List1AndList2): List1AndList2 is the concatenation of List1 and List2

```
%%%concat = append
concat([],X,X).
concat([X|L1],L2,[X|L3]) :- concat(L1,L2,L3).
```

Notare l'uso dell'unificazione nella regola: avremmo potuto scriverla così (ma non sarebbe Prolog style!):

```
concat([X|L1],L2,Z) :- concat(L1,L2,L3), Z=[X|L3].
```

per calcolare la concatenzione Z di [X|L1] e L2, calcolare la concatenazione L3 di L1 e L2. Z è allora [X|L3].

Ma tanto vale unificare direttamente nella testa della clausola il "risultato" con [X|L3]

Reversibilità di append

```
?- append([a,b],[1,2,3],X).
X = [a, b, 1, 2, 3].

?- append(X,[1,2,3],[a,b,1,2,3]).
X = [a, b]

?- append(X,Y,[1,2,3]).
X = [],
Y = [1, 2, 3] ;
X = [1],
Y = [2, 3] ;
X = [1, 2],
Y = [3] ;
X = [1, 2, 3],
Y = [] ;
false.
```

Uso di append

```
%%% ultimo(L,X) = X e' l'ultimo elemento di L
ultimo(L,X) :-
        append(_,[X],L).
```

Attenzione: append è un predicato

```
/* append3(L1,L2,L3,Result) = Result e' la concatenazione
                 di L1, L2 e L3 */
append3(L1,L2,L3,Result) :-
        append(L1,L2,L),
        append(L,L3,Result).
```

Esercizio: vedere tutte le soluzioni fornite dal Prolog per il goal append3(X,Y,Z,[a,b,c]), osservare l'ordine in cui sono generate e meditare su come funziona il backtracking.

Accesso alla definizione dei predicati

```
?- listing(ultimo).
ultimo(B, A) :-
        append(_, [A], B).
true.

?- listing(nextto).
lists:nextto(A, B, [A, B|_]).
lists:nextto(A, B, [_|C]) :-
        nextto(A, B, C).
true.
```

listing senza argomenti: elenca tutte le clausole del programma definite dall'utente.

Notare: si può usare lo stesso nome per due predicati che hanno un diverso numero di argomenti (arità), il Prolog non li confonde, ma li considera predicati distinti.

Algoritmi di backtracking

Implementare in Prolog algoritmi di backtracking è molto semplice.

Ad esempio: ricerca di un ramo in un albero binario fino a una foglia con una data etichetta.

branch(+T,?Leaf,?Ramo) = Ramo è un ramo di T dalla radice a una foglia etichettata da Leaf

```
branch(t(X,empty,empty),X,[X]).
branch(t(X,Left,Right),Leaf,[X|Ramo]) :-
        branch(Left,Leaf,Ramo) ;
        branch(Right,Leaf,Ramo).
```

Notare che quello che è falso non va "detto".

Il programma si può utilizzare per generare tutte le "coppie" foglia-ramo di un albero dato:

```
?- branch(...,Leaf,Ramo).
```

Ancora sulle strutture: gli operatori

Anche le sequenze di goal e le clausole sono termini complessi, i cui operatori principali sono, rispettivamente, la virgola e :-

Sono operatori anche i simboli usati per le funzioni aritmetiche (+, *, mod, . . .), gli operatori di confronto (=, <, >, . . .)

http://www.swi-prolog.org/pldoc/man?section=operators

Gli operatori sono come i funtori, sono utilizzati per rendere il codice più leggibile (altrimenti si dovrebbe scrivere, per esempio **+(3,2)**, anziché **3+2**)

A ogni operatore sono associati: la sintassi con cui deve essere utilizzato, la precedenza e l'associatività

Sintassi e precedenza degli operatori

Un operatore può essere

- infisso (sempre a due argomenti): va scritto in mezzo ai suoi due argomenti (esempi: + = > , ; . . .)
- prefisso: va scritto prima degli argomenti (ad esempio, il segno - per rappresentare i numeri negativi)
- postfisso: va scritto dopo gli argomenti (esempio: ++ in C)

Sintassi e precedenza degli operatori

Un operatore può essere

- infisso (sempre a due argomenti): va scritto in mezzo ai suoi due argomenti (esempi: + = > , ; . . .)
- prefisso: va scritto prima degli argomenti (ad esempio, il segno - per rappresentare i numeri negativi)
- postfisso: va scritto dopo gli argomenti (esempio: ++ in C)

A ogni operatore è associata una precedenza, per disambiguare le espressioni.

Per esempio: **2+3*5** significa **2+(3*5)**, perché la precedenza di **+** è maggiore di quella di *****:

```
?- X+Y = 3+2*5.
X = 3,
Y = 2*5.
```

```
?- X*Y = 3+2*5.
false.
```

La precedenza è un valore numerico (tra 0 e 1200) associato all'operatore: se un operatore ha precedenza maggiore di un altro, il secondo "lega più strettamente" del primo (**+** ha precedenza 500, ***** ha precedenza 400)

Associatività degli operatori

L'associatività degli operatori serve per disambiguare espressioni in cui occorrono operatori con la stessa precedenza.

Ad esempio: **10-3-2** significa:

- **(10-3)-2** (associativo a sinistra), oppure
- **10-(3-2)** (associativo a destra) ?

```
?- X-Y = 10-3-2.
X = 10-3,
Y = 2.
```

L'associatività di **-** è rappresentata da yfx: alla sua sinistra possono stare (senza bisogno di mettere parentesi) termini con precedenza minore o uguale a quella di **-** (rappresentati da y), alla sua destra solo termini con precedenza strettamente minore di quella di **-** (rappresentati da x)

Un operatore può anche essere non associativo: si devono comunque usare le parentesi

Tipo di un operatore

Convenzione per indicarne sintassi e associatività

Precedenza di un termine:

- atomi, strutture costruite con funtori, espressioni tra parentesi: precedenza 0
- espressione il cui operatore principale è $\otimes$: precedenza di $\otimes$

Il simbolo **f** rappresenta l'operatore, **x** e **y** i suoi argomenti: **x** è un termine con precedenza strettamente minore di quella di **f**, **y** è un termine con precedenza minore o uguale a quella di **f**.

yfx	infisso, associativo a sinistra
xfy	infisso, associativo a destra
xfx	infisso, non associativo
fx	prefisso, non associativo
fy	prefisso, associativo a destra
xf	postfisso, non associativo
yf	postfisso, associativo a sinistra

Esempio: un modo alternativo per scrivere la negazione

not è un funtore: il suo argomento va sempre messo tra parentesi.

```
?- not member(3,[1,2,4]).
ERROR: Syntax error: Operator expected
```

\+ è un operatore (con precedenza 900 e associatività **fy**) che ha lo stesso significato del **not**.

```
?- \+ member(3,[1,2,4]).
true.

?- \+ \+ member(3,[1,2,4]).
false.
```

Definizione di nuovi operatori

Il programmatore può definire nuovi operatori, specificandone precedenza e associatività.

:- op(precedenza, tipo, nome).

```
% + lega meno stretto di »
?- op(600,fx,»).

?- X+Y = »a+b.
false.

?- »X = »a+b.
X = a+b.
```

Definizione di nuovi operatori

Il programmatore può definire nuovi operatori, specificandone precedenza e associatività.

:- op(precedenza, tipo, nome).

```
% + lega meno stretto di »
?- op(600,fx,»).

?- X+Y = »a+b.
false.

?- »X = »a+b.
X = a+b.
```

```
% « lega piu' stretto di +
?- op(200,fx,«).

?- X+Y = «a+b.
X = «a,
Y = b.

?- «X = «a+b.
false.
```

Definizione di nuovi operatori

```
?- op(500,xfy,&).

?- X & Y = 3 * a & b.
X = 3*a,
Y = b.

?- X & Y = 3 & a & b.
X = 3,
Y = a&b.
```

Definizione di nuovi operatori

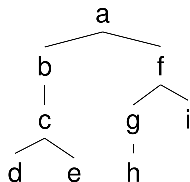
```
?- op(500,xfy,&).

?- X & Y = 3 * a & b.
X = 3*a,
Y = b.

?- X & Y = 3 & a & b.
X = 3,
Y = a&b.

?- X = 3 + a & b.
ERROR: Syntax error: Operator priority clash
```

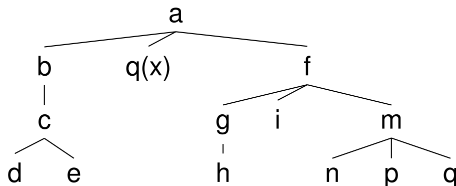
Non puo' essere **(3+a) & b**, perché **&** ha tipo **xfy**
Non puo' essere **3 + (a&b)**, perché **+** ha tipo **yfx**

Esempio: rappresentazione di alberi n-ari

?- op(600,xfx,=>).

- **Radice => lista non vuota di sottoalberi**, oppure
- **Foglia** (qualsiasi termine che non abbia **=>** come funtore principale)






```
a => [b=>[c => [d,e]],
      f => [g => [h],
            i]]
```

```
a => [b=> [c => [d,e]],
      q(x),
      f => [g => [h],
            i,
            m=>[n,p,q]]]
```

Esempio: rappresentazione di formule proposizionali

Rappresentiamo la negazione mediante **-** (unario), che ha precedenza 200 e tipo fy.

```
:- op(600,yfx,&).      % Congiunzione
:- op(650,yfx,v).      % Disgiunzione
:- op(670,yfx,=>).     % Implicazione
:- op(680,yfx,<=>).    % Doppia implicazione
```

Generazione delle sottoformule di una formula

subforms(+A,-List): List è una lista con tutte le sottoformule di A.

```
subforms(A,[A]) :- atom(A).
subforms(-A,[-A|Rest]) :- subforms(A,Rest).
subforms(A,[A|Rest]) :-
        (A = F & G ; A = F v G ;
         A = F => G ; A = F <=> G),
        subforms(F,Fforms), subforms(G,Gforms),
        append(Fforms,Gforms,Rest).

?- subforms(a & b v -c => -(p v q & r),Forms),
   writeln(Forms).
[a&b v -c=> - (p v q&r),a&b v -c,a&b,a,b,-c,c,
  - (p v q&r),p v q&r,p,q&r,q,r]

Forms = [a&b v -c=> - (p v q&r), a&b v -c, a&b,
         a, b, -c, c, - (...v...), ...v...|...]
```