Logica dei Predicati (o Logica del Primo Ordine)

Il mondo è analizzato in termini di OGGETTI, PROPRIETÀ, RELAZIONI.

I numeri primi maggiori di due sono dispari

- oggetti: due;
- relazioni e proprietà: essere un numero primo, essere dispari (proprietà), essere maggiore di (relazione a due argomenti);

Per ogni oggetto x, se x è un numero primo e x è maggiore di due, allora x è dispari:

$$\forall x(\mathit{primo}(x) \land \mathit{maggiore}(x, 2) \rightarrow \mathit{dispari}(x))$$

- x: variabile
- 2: costante
- primo, $\mathit{dispari}$, $\mathit{maggiore}$: simboli di predicato
- $\forall$: quantificatore universale
- connettivi proposizionali

Atomi: relazioni tra oggetti
Quantificatori: per ogni ($\forall$), esiste ($\exists$)

Logica dei predicati: sintassi (linguaggi del primo ordine)

Alfabeto :

1. **Simboli logici** (comuni a tutti i linguaggi del primo ordine):
   - **Variabili**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$ (insieme infinito);
   - **Connettivi proposizionali** e costanti $\top, \bot$;
   - **Quantificatori**: $\forall, \exists$;
   - **Simboli separatori** (parentesi e virgola);
   - eventualmente, se si tratta di un **linguaggio con uguaglianza**, il simbolo di predicato **=**.
2. **Simboli non logici** (specifici del singolo linguaggio):
   - **simboli di predicato**, con associata "arità": $\{p^n, q^m, r^k, \ldots\}$; l'insieme dei simboli di predicato "non logici" può essere vuoto solo se si tratta di un linguaggio con uguaglianza (che ha comunque il simbolo "="); altrimenti è un insieme non vuoto.
   - **Costanti**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$;
   - **Simboli funzionali**, con associata "arità": $f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \ldots$

Termini

Una **formula atomica** rappresenta il fatto che una data relazione vale tra alcuni oggetti.

$$maggiore(2, 0)$$

Per definire le formule si deve prima definire una classe di espressioni con le quali si possano denotare gli oggetti: i **termini del linguaggio**.

Definizione induttiva dell'insieme dei termini:

- Ogni variabile è un termine
- Ogni costante è un termine
- Se $t_1, .., t_n$ sono termini e f^n è un simbolo funzionale, allora $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine

Termini chiusi: senza variabili

Termini

Una **formula atomica** rappresenta il fatto che una data relazione vale tra alcuni oggetti.

$$maggiore(2, 0)$$

Per definire le formule si deve prima definire una classe di espressioni con le quali si possano denotare gli oggetti: i **termini del linguaggio**.

Definizione induttiva dell'insieme dei termini:

- Ogni variabile è un termine
- Ogni costante è un termine
- Se $t_1, .., t_n$ sono termini e f^n è un simbolo funzionale, allora $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine

Termini chiusi: senza variabili

Definizione ricorsiva dell'insieme $vars(t)$ delle variabili che occorrono in un termine t

- se t è una variabile x, allora $vars(t) = \{x\}$
- se t è una costante, allora $vars(t) = \emptyset$
- se $t = f(t_1, ..., t_n)$, allora $vars(t) = vars(t_1) \cup ... \cup vars(t_n)$

Formule

1. Se p è un simbolo di predicato a n argomenti, e $t_1, ..., t_n$ sono termini, allora $p(t_1, ..., t_n)$ è una formula (**formula atomica**)
2. $\top$ e $\bot$ sono formule (atomiche)
3. se A è una formula, allora anche $\neg A$ è una formula
4. se A e B sono formule, allora anche $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \equiv B)$ sono formule
5. Se A è una formula e x una variabile, allora $\forall x A$ e $\exists x A$ sono formule
6. Nient'altro è una formula

Esempi

$fratello(caino, abele)$
$\neg fratello(giovanni, robin\_hood)$
$fratello(x, abele) \rightarrow assassino(x)$

$\forall x(fratello(x, abele) \rightarrow assassino(x))$
$\exists x(fratello(x, abele) \wedge assassino(x))$
$\forall x(fratello(x, y) \rightarrow fratello(y, x))$
$\exists x(padre(x, abele) \wedge padre(x, caino))$

$\forall x \forall y(fratello(x, y) \equiv \exists z(padre(z, x) \wedge padre(z, y)))$

Variabili libere e vincolate

Scopo o **campo d'azione** di un quantificatore:

- di $\forall x$ in $\forall x A$: A
- di $\exists x$ in $\exists x A$: A

$$p(c) \wedge \forall x \overbrace{(q(x,c) \rightarrow \exists y \underbrace{(p(y) \vee r(x,y,z))}_{scopo\ di\ \exists y})}^{scopo\ di\ \forall x} \equiv \exists x \overbrace{\forall y \ \underbrace{q(x,y)}_{scopo\ di\ \forall y}}^{scopo\ di\ \exists x}$$

Occorrenza vincolata di una variabile: $\boldsymbol{x}$ è la variabile di un quantificatore oppure occorre nello scopo di un quantificatore $\forall \boldsymbol{x}$ o $\exists \boldsymbol{x}$

Occorrenza libera di x: occorrenza non vincolata

$$p(\boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{x} (q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \vee \neg q(c, \boldsymbol{x}))$$

x è **libera** in A sse ha almeno un'occorrenza libera in A
(variabili libere $\approx$ variabili globali   variabili vincolate $\approx$ variabili locali)

Formula chiusa : senza variabili libere

Definizione ricorsiva dell'insieme delle variabili libere in una formula

- se $A = p(t_1, ..., t_n)$ allora $free\_vars(A) = vars(t_1) \cup ... \cup vars(t_n)$
- se $A = \top$ o $A = \bot$ allora $free\_vars(A) = \emptyset$
- se $A = \neg A_1$ allora $free\_vars(A) = free\_vars(A_1)$
- se $A = A_1 \star A_2$ dove $\star$ è un connettivo binario, allora $free\_vars(A) = free\_vars(A_1) \cup free\_vars(A_2)$
- se $A = Qx\, A_1$ dove Q è un quantificatore, allora $free\_vars(A) = free\_vars(A_1) - \{x\}$

Sostituzione di variabili con termini

Se A è una formula, x una variabile e t un termine:

$$A[t/x]$$

denota la formula che si ottiene da A sostituendo ogni occorrenza **livera** della variabile x con il termine t

Sostituzione **simultanea**:

$$A[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]$$

Esempio:

$$p(x, y)[f(y)/x, f(x)/y] = p(f(y), f(x))$$

$$p(x, y)[f(y)/x][f(x)/y] = p(f(y), y)[f(x)/y] = p(f(f(x)), f(x))$$

$$p(x, y)[f(x)/y][f(y)/x] = p(x, f(x))[f(y)/x] = p(f(y), f(f(y)))$$

N.B. Solo le occorrenze libere vengono sostituite:

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{x}, c) \wedge \forall x(q(x, \mathbf{y}) \rightarrow \exists y\, r(y))[t_1/x, t_2/y] \\ & = p(t_1, c) \wedge \forall x(q(x, t_2) \rightarrow \exists y\, r(y)) \end{aligned}$$

Significato delle formule

$\exists x\, p(x) \vee \exists y\, q(y) \rightarrow \exists z\, (p(z) \wedge q(z))$ è vera o falsa?

Dove? Nel **dominio** $D = \{1, 2\}$
Come sono interpretati p e q?

$p(x)$ = x è pari — Estensione di p: $\{2\}$
$q(x)$ = x è maggiore o uguale a 1 — Estensione di q: $\{1, 2\}$

$\exists x\, p(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$
$\exists x\, q(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{1, 2\}$
$\exists z\, (p(z) \wedge q(z))$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$ e $d \in \{1, 2\}$

Significato delle formule

$\exists x\, p(x) \vee \exists y\, q(y) \rightarrow \exists z\, (p(z) \wedge q(z))$ è vera o falsa?

Dove? Nel **dominio** $D = \{1, 2\}$
Come sono interpretati p e q?

$p(x)$ = x è pari
$q(x)$ = x è maggiore o uguale a 1

Estensione di p: $\{2\}$
Estensione di q: $\{1, 2\}$

$\exists x\, p(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$
$\exists x\, q(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{1, 2\}$
$\exists z\, (p(z) \wedge q(z))$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$ e $d \in \{1, 2\}$

Consideriamo ora il **dominio** $D = \{1, 2\}$

$p(x)$ = x è pari; estensione: $\{2\}$
$q(x)$ = x è dispari; estensione: $\{1\}$

$\exists x p(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$
$\exists x q(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{1\}$
$\exists z(p(z) \wedge q(z))$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$ e $d \in \{1\}$

Semantica: interpretazione di un linguaggio

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, con costanti $\mathcal{C}$, simboli funzionali $\mathcal{F}$ e simboli di predicato $\mathcal{P}$

Interpretazione di $\mathcal{L}$:

1. Insieme non vuoto D (dominio o universo dell'interpretazione)
2. Funzione di interpretazione che associa:
   - a ogni $c \in \mathcal{C}$ un elemento $\mathcal{M}(c) \in D$
   - a ogni $f^n \in \mathcal{F}$ una funzione $\mathcal{M}(f) : D^n \longrightarrow D$
   - a ogni $p^n \in \mathcal{P}$ una relazione n-aria su D: $\mathcal{M}(p) \subseteq D^n$

Semantica: interpretazione di un linguaggio

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, con costanti $\mathcal{C}$, simboli funzionali $\mathcal{F}$ e simboli di predicato $\mathcal{P}$

Interpretazione di $\mathcal{L}$:

1. Insieme non vuoto D (dominio o universo dell'interpretazione)
2. Funzione di interpretazione che associa:
   - a ogni $c \in \mathcal{C}$ un elemento $\mathcal{M}(c) \in D$
   - a ogni $f^n \in \mathcal{F}$ una funzione $\mathcal{M}(f) : D^n \longrightarrow D$
   - a ogni $p^n \in \mathcal{P}$ una relazione n-aria su D: $\mathcal{M}(p) \subseteq D^n$

Per linguaggi con eguaglianza: $=$ è un simbolo logico e l'interpretazione di $=$ è sempre l'identità:

$$\mathcal{M}(=) = \{< d, d > \ \mid d \in D\}$$

Interpretazione di una formula A: interpetazione di qualsiasi linguaggio che contenga tutti i simboli non logici di A

Esempio

Sono interpretazioni di $\forall x\, p(a, x)$, e del linguaggio con $\mathcal{C} = \{a\},\ \mathcal{F} = \emptyset,\ \mathcal{P} = \{p\}$:

- $\mathcal{M}_1$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.

Esempio

Sono interpretazioni di $\forall x\, p(a, x)$, e del linguaggio con $\mathcal{C} = \{a\},\ \mathcal{F} = \emptyset,\ \mathcal{P} = \{p\}$:

- $\mathcal{M}_1$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.
- $\mathcal{M}_2$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 1$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.

Esempio

Sono interpretazioni di $\forall x\, p(a, x)$, e del linguaggio con $\mathcal{C} = \{a\},\ \mathcal{F} = \emptyset,\ \mathcal{P} = \{p\}$:

- $\mathcal{M}_1$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.
- $\mathcal{M}_2$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 1$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.
- $\mathcal{M}_3$ con dominio $\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$.

Esempio

Sono interpretazioni di $\forall x\, p(a, x)$, e del linguaggio con $\mathcal{C} = \{a\},\ \mathcal{F} = \emptyset,\ \mathcal{P} = \{p\}$:

- $\mathcal{M}_1$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.
- $\mathcal{M}_2$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 1$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.
- $\mathcal{M}_3$ con dominio $\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$.
- $\mathcal{M}_4$ con dominio S uguale all'insieme di tutte le sequenze finite di caratteri alfanumerici, $\mathcal{M}(a) = \epsilon$ (la sequenza vuota), e $\mathcal{M}(p) = \{\langle s_1, s_2\rangle \in S^2 \mid s_1$ è una sottosequenza di $s_2\}$.

Esempio

Sono interpretazioni di $\forall x\, p(a, x)$, e del linguaggio con $\mathcal{C} = \{a\},\ \mathcal{F} = \emptyset,\ \mathcal{P} = \{p\}$:

- $\mathcal{M}_1$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.
- $\mathcal{M}_2$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 1$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.
- $\mathcal{M}_3$ con dominio $\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$.
- $\mathcal{M}_4$ con dominio S uguale all'insieme di tutte le sequenze finite di caratteri alfanumerici, $\mathcal{M}(a) = \epsilon$ (la sequenza vuota), e $\mathcal{M}(p) = \{\langle s_1, s_2\rangle \in S^2 \mid s_1$ è una sottosequenza di $s_2\}$.
- $\mathcal{M}_5$ con dominio $D = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{M}(a) = 1$ e $\mathcal{M}(p) = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

Interpretazione dei termini chiusi

1. se c è una costante in $\mathcal{L}$, l'interpretazione di c è $\mathcal{M}(c)$;
2. se $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine chiuso, la sua interpretazione è $\mathcal{M}(f(t_1, ..., t_n)) = \mathcal{M}(f)(\mathcal{M}(t_1), ..., \mathcal{M}(t_n))$

Esempio: se $\mathcal{C} = \{zero\}$, $\mathcal{F} = \{succ, sum, times\}$ e $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \{0\}, \{\lambda x.x + 1, +, \times\}\rangle$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(times(succ(succ(zero)), sum(succ(zero), zero)))\\
&\quad = \mathcal{M}(times)(\mathcal{M}(succ(succ(zero))), \mathcal{M}(sum(succ(zero), zero)))\\
&\quad = \mathcal{M}(succ(succ(zero)) \times \mathcal{M}(sum(succ(zero), zero))\\
&\quad = \mathcal{M}(succ)(\mathcal{M}(succ(zero))) \times \mathcal{M}(sum)(\mathcal{M}(succ(zero)), \mathcal{M}(zero))\\
&\quad = (\mathcal{M}(succ(zero)) + 1) \times (\mathcal{M}(succ(zero)) + \mathcal{M}(zero))\\
&\quad = (\mathcal{M}(succ)(\mathcal{M}(zero)) + 1) \times (\mathcal{M}(succ)(\mathcal{M}(zero)) + 0)\\
&\quad = ((\mathcal{M}(zero) + 1) + 1) \times ((\mathcal{M}(zero) + 1) + 0)\\
&\quad = ((0 + 1) + 1) \times ((0 + 1) + 0)\\
&\quad = 2 \times 1 = 2
\end{aligned}
$$

Interpretazione di termini con variabili

Come interpretiamo le variabili?

$$\textcolor{red}{\textbf{Assegnazione}}: s : X \rightarrow D$$

Interpretazione di un termine t secondo l'assegnazione s:

$$\overline{s}(t)$$

1. se $x \in X$ è una variabile, allora $\overline{s}(x) = s(x)$;
2. se c è una costante in $\mathcal{L}$, allora $\overline{s}(c) = \mathcal{M}(c)$;
3. se $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine, allora $\overline{s}(t) = \mathcal{M}(f)(\overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n))$.

Esempio: $\mathcal{M}$ su $\mathbb{N}$, con $\mathcal{M}(f) = \lambda n.2 \times n$ e s tale che $s(x) = 3$:

$$\begin{aligned}\overline{s}(f(x)) &= \mathcal{M}(f)(\overline{s}(x)) \\ &= (\lambda n.2 \times n)(s(x)) \\ &= (\lambda n.2 \times n)3 \;=\; 2 \times 3 \;=\; 6\end{aligned}$$

Interpretazione delle formule: assegnazioni

Dipende dall'interpretazione delle variabili libere che occorrono nella formula.

Sia $\mathcal{M}$	su $\mathbb{N}$,
	$\mathcal{M}(f) = \lambda n.2 \times n$,
	$\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m \rangle \mid n^2 \leq m\}$,
e s	tale che $s(x) = 3$ e $s(y) = 5$;
s'	tale che $s'(x) = 4$ e $s'(y) = 5$

La formula $p(x, f(y))$ è vera in $\mathcal{M}$ secondo l'assegnazione s,
(è vero che $3^2 \leq 2 \times 5$)

Ma è falsa in $\mathcal{M}$ secondo l'assegnazione s'
(è falso che $4^2 \leq 2 \times 5$)

Varianti di un'assegnazione

x-varianti

s' è una x-variante di s sse per ogni variabile y diversa da x: $s'(y) = s(y)$.

Esempio: le due assegnazioni qui sotto, s e s', sono x_4-varianti l'una dell'altra.

x_1	1
x_2	2
x_3	3
$\mathbf{x_4}$	**4**
x_5	5
...	...

x_1	1
x_2	2
x_3	3
$\mathbf{x_4}$	**44**
x_5	5
...	...

$s' = s[44/x_4]$ e $s = s'[4/x_4]$

Notazione: $s[d/x]$ è la x-variante di s che assegna d a x

N.B. Per ogni assegnazione s e variabile x, s è una x-variante di se stessa:

$$s = s[s(x)/x]$$

Semantica di una formula in un'interpretazione, secondo un'assegnazione data

A è vera in $\mathcal{M}$ secondo l'assegnazione s
(o s soddisfa A in $\mathcal{M}$)

$$(\mathcal{M}, s) \models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \in \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \models \top$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$;
3. $(\mathcal{M}, s) \models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \models A \wedge B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ e $(\mathcal{M}, s) \models B$;
5. $(\mathcal{M}, s) \models A \vee B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ oppure $(\mathcal{M}, s) \models B$;
6. $(\mathcal{M}, s) \models A \rightarrow B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ oppure $(\mathcal{M}, s) \models B$;
7. $(\mathcal{M}, s) \models A \equiv B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ e $(\mathcal{M}, s) \models B$, oppure $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models B$
8. $(\mathcal{M}, s) \models \forall x A$ sse per ogni $d \in D$: $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models A$
9. $(\mathcal{M}, s) \models \exists x A$ sse esiste $d \in D$, tale che: $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models A$

Esempio

Sia $\mathcal{M}$ con $D = \{1, 2\}$, $\mathcal{M}(p) = \{2\}$ e $\mathcal{M}(q) = \{1, 2\}$, e sia s qualsiasi assegnazione su D

$(\mathcal{M}, s) \models \exists y(p(y) \wedge q(y))$ se e solo se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/y]) \models p(y) \wedge q(y)$.
Poiché ci sono solo due oggetti nel dominio, questo vale se e solo se si verifica uno di questi due casi:

1. $(\mathcal{M}, s[1/y]) \models p(y) \wedge q(y)$: perché ciò sia vero si devono verificare entrambi i casi seguenti:
   a. $(\mathcal{M}, s[1/y]) \models p(y)$: ciò vale se e solo se $s[1/y](y) \in \mathcal{M}(p)$, cioè $1 \in \{2\}$, ma questo è falso.
   b. $(\mathcal{M}, s[1/y]) \models q(y)$.

   Poiché (a) è falso, è falso anche il caso 1.
2. $(\mathcal{M}, s[2/y]) \models p(y) \wedge q(y)$: perché ciò sia vero si devono verificare entrambi i casi seguenti:
   a. $(\mathcal{M}, s[2/y]) \models p(y)$: ciò vale se e solo se $s[2/y](y) \in \mathcal{M}(p)$, cioè $2 \in \{2\}$, e questo è vero.
   b. $(\mathcal{M}, s[2/y]) \models q(y)$: ciò vale se e solo se $s[2/y](y) \in \mathcal{M}(q)$, cioè $2 \in \{1, 2\}$, e anche questo è vero.

   Quindi il caso 2 è vero.

Esercizi

Siano:

- $\mathcal{M}$ con dominio $D = \{1, 2\}$, $\mathcal{M}(p) = \{2\}$ e $\mathcal{M}(q) = \{1, 2\}$
- $\mathcal{M}'$ uguale a $\mathcal{M}$ tranne che $\mathcal{M}(q) = \{1\}$.
- $\mathcal{M}''$ uguale a $\mathcal{M}$ tranne che $\mathcal{M}''(p) = \emptyset$.

Sia inoltre s qualsiasi assegnazione su D.

1. Verificare se $(\mathcal{M}', s) \models \exists y(p(y) \wedge q(y))$.
2. Verificare se $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(p(x) \wedge q(x))$.
3. Verificare se $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(p(x) \vee q(x))$.
4. Verificare se $(\mathcal{M}', s) \models \forall x(p(x) \vee q(x))$.
5. Verificare se $(\mathcal{M}'', s) \models \forall x(p(x) \vee q(x))$.
6. Verificare se $(\mathcal{M}', s) \models \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$.
7. Verificare se $(\mathcal{M}'', s) \models \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$.
8. Verificare se $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
9. Verificare se $(\mathcal{M}', s) \models \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
10. Verificare se $(\mathcal{M}'', s) \models \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$

Quando un'assegnazione non soddisfa una formula?

$$(\mathcal{M}, s) \not\models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse

Quando un'assegnazione non soddisfa una formula?

$$(\mathcal{M}, s) \not\models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \notin \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \not\models \top$ è sempre falso e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$ è sempre vero;
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg A$ sse

Quando un'assegnazione non soddisfa una formula?

$$(\mathcal{M}, s) \not\models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \notin \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \not\models \top$ è sempre falso e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$ è sempre vero;
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \wedge B$ sse

Quando un'assegnazione non soddisfa una formula?

$$(\mathcal{M}, s) \not\models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \notin \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \not\models \top$ è sempre falso e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$ è sempre vero;
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \wedge B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **oppure** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
5. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \vee B$ sse

Quando un’assegnazione non soddisfa una formula?

$$(\mathcal{M}, s) \not\models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \notin \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \not\models \top$ è sempre falso e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$ è sempre vero;
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \wedge B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **oppure** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
5. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \vee B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **e** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
6. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \rightarrow B$ sse

Quando un'assegnazione non soddisfa una formula?

$$(\mathcal{M}, s) \not\models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \notin \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \not\models \top$ è sempre falso e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$ è sempre vero;
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \wedge B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **oppure** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
5. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \vee B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **e** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
6. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \rightarrow B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ **e** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
7. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \equiv B$ sse

Quando un'assegnazione non soddisfa una formula?

$$(\mathcal{M}, s) \not\models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \notin \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \not\models \top$ è sempre falso e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$ è sempre vero;
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \wedge B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **oppure** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
5. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \vee B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **e** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
6. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \rightarrow B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ **e** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
7. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \equiv B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ e $(\mathcal{M}, s) \models B$, oppure $(\mathcal{M}, s) \models A$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models B$
8. $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x A$ sse

Quando un'assegnazione non soddisfa una formula?

$$(\mathcal{M}, s) \not\models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n)\rangle \notin \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \not\models \top$ è sempre falso e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$ è sempre vero;
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \wedge B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **oppure** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
5. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \vee B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **e** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
6. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \rightarrow B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ **e** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
7. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \equiv B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ e $(\mathcal{M}, s) \models B$, oppure $(\mathcal{M}, s) \models A$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models B$
8. $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x A$ sse **esiste** $d \in D$, tale che: $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models A$
9. $(\mathcal{M}, s) \not\models \exists x A$ sse

Quando un'assegnazione non soddisfa una formula?

$$(\mathcal{M}, s) \not\models A$$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \notin \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \not\models \top$ è sempre falso e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$ è sempre vero;
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \wedge B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **oppure** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
5. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \vee B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ **e** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
6. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \rightarrow B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ **e** $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
7. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \equiv B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ e $(\mathcal{M}, s) \models B$, oppure $(\mathcal{M}, s) \models A$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models B$
8. $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x A$ sse **esiste** $d \in D$, tale che: $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models A$
9. $(\mathcal{M}, s) \not\models \exists x A$ sse **per ogni** $d \in D$: $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models A$

Verità e falsità di una formula in una interpretazione

A è **vera** in $\mathcal{M}(\mathcal{M} \models A)$ sse per ogni assegnazione *s* su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

A è **falsa** in una interpretazione $\mathcal{M}$ sse

Verità e falsità di una formula in una interpretazione

A è **vera** in $\mathcal{M}(\mathcal{M} \models A)$ sse per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

A è **falsa** in una interpretazione $\mathcal{M}$ sse nessuna assegnazione la soddisfa: per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \not\models A$

Una formula può non essere né vera né falsa in una interpretazione $\mathcal{M}$

Proprietà della verità/falsità

1. A è falsa in $\mathcal{M}$ sse $\mathcal{M} \models \neg A$; $\mathcal{M} \models A$ sse $\neg A$ è falsa in $\mathcal{M}$.

Verità e falsità di una formula in una interpretazione

A è **vera** in $\mathcal{M}(\mathcal{M} \models A)$ sse per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

A è **falsa** in una interpretazione $\mathcal{M}$ sse nessuna assegnazione la soddisfa: per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \not\models A$

Una formula può non essere né vera né falsa in una interpretazione $\mathcal{M}$

Proprietà della verità/falsità

1. A è falsa in $\mathcal{M}$ sse $\mathcal{M} \models \neg A$; $\mathcal{M} \models A$ sse $\neg A$ è falsa in $\mathcal{M}$.
2. Nessuna formula può essere contemporaneamente vera e falsa in una interpretazione.

Verità e falsità di una formula in una interpretazione

A è **vera** in $\mathcal{M}$($\mathcal{M} \models A$) sse per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

A è **falsa** in una interpretazione $\mathcal{M}$ sse nessuna assegnazione la soddisfa: per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \not\models A$

Una formula può non essere né vera né falsa in una interpretazione $\mathcal{M}$

Proprietà della verità/falsità

1. A è falsa in $\mathcal{M}$ sse $\mathcal{M} \models \neg A$; $\mathcal{M} \models A$ sse $\neg A$ è falsa in $\mathcal{M}$.
2. Nessuna formula può essere contemporaneamente vera e falsa in una interpretazione.
3. $\mathcal{M} \models A$ sse $\mathcal{M} \models \forall x A$. Quindi $\mathcal{M} \models A$ sse $\mathcal{M} \models \forall x_1 ... \forall x_n A$ (chiusura universale di A).

Verità e falsità di una formula in una interpretazione

A è **vera** in $\mathcal{M}$($\mathcal{M} \models A$) sse per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

A è **falsa** in una interpretazione $\mathcal{M}$ sse nessuna assegnazione la soddisfa: per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \not\models A$

Una formula può non essere né vera né falsa in una interpretazione $\mathcal{M}$

Proprietà della verità/falsità

1. A è falsa in $\mathcal{M}$ sse $\mathcal{M} \models \neg A$; $\mathcal{M} \models A$ sse $\neg A$ è falsa in $\mathcal{M}$.
2. Nessuna formula può essere contemporaneamente vera e falsa in una interpretazione.
3. $\mathcal{M} \models A$ sse $\mathcal{M} \models \forall x A$. Quindi $\mathcal{M} \models A$ sse $\mathcal{M} \models \forall x_1 ... \forall x_n A$ (chiusura universale di A).
4. Se $s(x) = s'(x)$ per ogni variabile x che occorre libera in A, allora $(\mathcal{M}, s) \models A$ sse $(\mathcal{M}, s') \models A$ (**Lemma di coincidenza**).

Verità e falsità di una formula in una interpretazione

A è **vera** in $\mathcal{M}(\mathcal{M} \models A)$ sse per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

A è **falsa** in una interpretazione $\mathcal{M}$ sse nessuna assegnazione la soddisfa: per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \not\models A$

Una formula può non essere né vera né falsa in una interpretazione $\mathcal{M}$

Proprietà della verità/falsità

1. A è falsa in $\mathcal{M}$ sse $\mathcal{M} \models \neg A$; $\mathcal{M} \models A$ sse $\neg A$ è falsa in $\mathcal{M}$.
2. Nessuna formula può essere contemporaneamente vera e falsa in una interpretazione.
3. $\mathcal{M} \models A$ sse $\mathcal{M} \models \forall x A$. Quindi $\mathcal{M} \models A$ sse $\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n A$ (chiusura universale di A).
4. Se $s(x) = s'(x)$ per ogni variabile x che occorre libera in A, allora $(\mathcal{M}, s) \models A$ sse $(\mathcal{M}, s') \models A$ (**Lemma di coincidenza**).
5. Se A è chiusa, allora per ogni $\mathcal{M}$ o $\mathcal{M} \models A$ oppure $\mathcal{M} \models \neg A$ (o tutte le assegnazioni soddisfano A, oppure nessuna la soddisfa). Se A è chiusa, $\mathcal{M} \models A$ sse esiste s tale che $(\mathcal{M}, s) \models A$.

Esempio: dimostrare che $\mathcal{M} \models A$ o $\mathcal{M} \not\models A$

Sia $A = \forall x\, p(a, x)$ e:

$\mathcal{M}_1$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}_1(a) = 0$, e $\mathcal{M}_1(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{M}_1 \models A \text{ sse per ogni } s\text{:} & (\mathcal{M}_1, s) \models A \\
& \text{sse per ogni } n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{M}_1, s[n/x]) \models p(a, x) \\
& \text{sse per ogni } n \in \mathbb{N},\ \langle s[n/x](a), s[n/x](x)\rangle \in \mathcal{M}_1(p) \\
& \text{sse per ogni } n \in \mathbb{N},\ \langle 0, n\rangle \in \mathcal{M}_1(p) \\
& \text{sse per ogni } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n\text{: vero}
\end{array}
$$

Esempio

$\mathcal{C} = \{felix,\ silvestro,\ giovanni,\ riccardo\}$
$\mathcal{F} = \{padre^1\}$
$\mathcal{P} = \{gatto^1,\ fratello^2, =\}$
Sia $\mathcal{M}$ con:

- $D = \{0, 1, 2, 3\}$
- $\mathcal{M}(felix) = 0,\ \mathcal{M}(silvestro) = 1, \mathcal{M}(giovanni) = 2, \mathcal{M}(riccardo) = 2$
- $\mathcal{M}(padre) = \{< 0, 0 >, < 1, 0 >, < 2, 3 >, < 3, 2 >\}$
  $\mathcal{M}(padre) = F$ tale che $F(0) = 0$, $F(1) = 0$, $F(2) = 3$, $F(3) = 2$
- $\mathcal{M}(gatto) = \{0, 1\}$,
  $\mathcal{M}(fratello) = \{< 0, 1 >, < 1, 0 >\}$

$$A = gatto(padre(padre(silvestro)))$$

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \models A & \text{sse} & \text{per ogni assegnazione } s\text{: } (\mathcal{M}, s) \models A \\
 & \text{sse} & s(padre(padre(silvestro))) \in \mathcal{M}(gatto) \\
 & \text{sse} & F(s(padre(silvestro))) \in \{0, 1\} \\
 & \text{sse} & F(F(s(silvestro))) \in \{0, 1\} \\
 & \text{sse} & F(F(1)) \in \{0, 1\} \\
 & \text{sse} & F(0) \in \{0, 1\} \\
 & \text{sse} & 0 \in \{0, 1\}\text{: vero}
\end{array}$$

Esempio (segue)

$$A = \exists x\,(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$$

$\mathcal{M} \models \exists x(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$
sse

Esempio (segue)

$$A = \exists x\,(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$$

$\mathcal{M} \models \exists x(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$
sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models A$
sse

Esempio (segue)

$$A = \exists x\,(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$$

$\mathcal{M} \models \exists x(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$
sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models A$
sse esiste $d \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x \wedge gatto(x)$
sse esiste $d \in D$ tale che

Esempio (segue)

$$A = \exists x\,(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$$

$\mathcal{M} \models \exists x(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$
sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models A$
sse esiste $d \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x \wedge gatto(x)$
sse esiste $d \in D$ tale che
$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x$ e $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models gatto(x)$
sse esiste $d \in D$ tale che

Esempio (segue)

$$A = \exists x\, (padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$$

$\mathcal{M} \models \exists x (padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$
sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models A$
sse esiste $d \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x \wedge gatto(x)$
sse esiste $d \in D$ tale che
$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x$ e $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models gatto(x)$
sse esiste $d \in D$ tale che
$\langle s[d/x](padre(silvestro)), s[d/x](x) \rangle \in \mathcal{M}(=)$ e

Esempio (segue)

$$A = \exists x\,(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$$

$\mathcal{M} \models \exists x(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$
sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models A$
sse esiste $d \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x \wedge gatto(x)$
sse esiste $d \in D$ tale che
$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x$ e $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models gatto(x)$
sse esiste $d \in D$ tale che
$\langle s[d/x](padre(silvestro)), s[d/x](x)\rangle \in \mathcal{M}(=)$ e $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(gatto)$
sse esiste $d \in D$ tale che

Esempio (segue)

$$A = \exists x\,(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$$

$\mathcal{M} \models \exists x(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$

sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models A$

sse esiste $d \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x \wedge gatto(x)$

sse esiste $d \in D$ tale che
$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x$ e $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models gatto(x)$

sse esiste $d \in D$ tale che
$\langle s[d/x](padre(silvestro)), s[d/x](x)\rangle \in \mathcal{M}(=)$ e $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(gatto)$

sse esiste $d \in D$ tale che
$\langle \mathcal{M}(padre)(\mathcal{M}(silvestro)), d\rangle \in \mathcal{M}(=)$ e

Esempio (segue)

$$A = \exists x\,(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$$

$\mathcal{M} \models \exists x(padre(silvestro) = x \wedge gatto(x))$
sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models A$
sse esiste $d \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x \wedge gatto(x)$
sse esiste $d \in D$ tale che
$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x$ e $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models gatto(x)$
sse esiste $d \in D$ tale che
$\langle s[d/x](padre(silvestro)), s[d/x](x)\rangle \in \mathcal{M}(=)$ e $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(gatto)$
sse esiste $d \in D$ tale che
$\langle \mathcal{M}(padre)(\mathcal{M}(silvestro)), d\rangle \in \mathcal{M}(=)$ e $d \in \mathcal{M}(gatto)$
sse esiste $d \in D$ tale che $F(1) = d$ e $d \in \mathcal{M}(gatto)$
sse esiste $d \in D$ tale che $0 = d$ e $d \in \mathcal{M}(gatto)$
sse $0 \in \{0, 1\}$: VERO

Esercizi: determinare l'interpretazione delle formule

- $\exists x(padre(silvestro) = x \wedge \exists y(padre(x) = y \wedge gatto(y)))$
- $\forall x(\neg\, padre(x) = felix \rightarrow padre(x) = padre(giovanni))$

Soddisfacibilità, validità, equivalenza logica

- A è **soddisfacibile**:

  esiste un'interpretazione $\mathcal{M}$ di A e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tale che
  $$(\mathcal{M}, s) \models A.$$

Soddisfacibilità, validità, equivalenza logica

- A è **soddisfacibile**:

  esiste un'interpretazione $\mathcal{M}$ di A e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tale che
  $$(\mathcal{M}, s) \models A.$$

- A è **valida** ($\models A$) sse è vera in ogni sua interpretazione:

  per ogni $\mathcal{M}$ e per ogni s: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

  A è valida sse $\neg A$ non è soddisfacibile.

Soddisfacibilità, validità, equivalenza logica

- A è **soddisfacibile**:

  esiste un'interpretazione $\mathcal{M}$ di A e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tale che $(\mathcal{M}, s) \models A$.

- A è **valida** ($\models A$) sse è vera in ogni sua interpretazione:

  per ogni $\mathcal{M}$ e per ogni s: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

  A è valida sse $\neg A$ non è soddisfacibile.

- A è **contraddittoria** (o **insoddisfacibile**) sse essa è falsa in ogni interpretazione:

  non esistono $\mathcal{M}$ e s tali che $(\mathcal{M}, s) \models A$.

Soddisfacibilità, validità, equivalenza logica

- A è **soddisfacibile**:

  esiste un'interpretazione $\mathcal{M}$ di A e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tale che $(\mathcal{M}, s) \models A$.

- A è **valida** ($\models A$) sse è vera in ogni sua interpretazione:

  $$\text{per ogni } \mathcal{M} \text{ e per ogni } s\text{: } (\mathcal{M}, s) \models A.$$

  A è valida sse $\neg A$ non è soddisfacibile.

- A è **contraddittoria** (o **insoddisfacibile**) sse essa è falsa in ogni interpretazione:

  $$\text{non esistono } \mathcal{M} \text{ e } s \text{ tali che } (\mathcal{M}, s) \models A.$$

- A **implica logicamente** B

  $$\text{per ogni } \mathcal{M} \text{ e } s\text{, se } (M, s) \models A\text{, allora } (M, s) \models B.$$

Soddisfacibilità, validità, equivalenza logica

- A è **soddisfacibile**:

  esiste un'interpretazione $\mathcal{M}$ di A e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tale che $(\mathcal{M}, s) \models A$.

- A è **valida** ($\models A$) sse è vera in ogni sua interpretazione:

  $$\text{per ogni } \mathcal{M} \text{ e per ogni } s\text{: } (\mathcal{M}, s) \models A.$$

  A è valida sse $\neg A$ non è soddisfacibile.

- A è **contraddittoria** (o **insoddisfacibile**) sse essa è falsa in ogni interpretazione:

  $$\text{non esistono } \mathcal{M} \text{ e } s \text{ tali che } (\mathcal{M}, s) \models A.$$

- A **implica logicamente** B

  $$\text{per ogni } \mathcal{M} \text{ e } s\text{, se } (M, s) \models A\text{, allora } (M, s) \models B.$$

- A e B sono **logicamente equivalenti** ($A \leftrightarrow B$)

  $$\text{per ogni } \mathcal{M} \text{ e } s\text{: } (\mathcal{M}, s) \models A \text{ sse } (\mathcal{M}, s) \models B.$$

Soddisfacibilità, validità, equivalenza logica

- A è **soddisfacibile**:

  esiste un'interpretazione $\mathcal{M}$ di A e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tale che $(\mathcal{M}, s) \models A$.

- A è **valida** ($\models A$) sse è vera in ogni sua interpretazione:

  per ogni $\mathcal{M}$ e per ogni s: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

  A è valida sse $\neg A$ non è soddisfacibile.

- A è **contraddittoria** (o **insoddisfacibile**) sse essa è falsa in ogni interpretazione:

  non esistono $\mathcal{M}$ e s tali che $(\mathcal{M}, s) \models A$.

- A **implica logicamente** B

  per ogni $\mathcal{M}$ e s, se $(M, s) \models A$, allora $(M, s) \models B$.

- A e B sono **logicamente equivalenti** ($A \leftrightarrow B$)

  per ogni $\mathcal{M}$ e s: $(\mathcal{M}, s) \models A$ sse $(\mathcal{M}, s) \models B$.

- Sia S un insieme di formule: $(\mathcal{M}, s) \models S$ sse per ogni formula C in S, $(\mathcal{M}, s) \models C$.

Conseguenza logica

- A è una **conseguenza logica** di S ($S \models A$)

$$\text{per ogni } \mathcal{M} \text{ e } \textbf{per ogni } s\text{,}$$
$$\text{se } (\mathcal{M}, s) \models S\text{, allora anche } (\mathcal{M}, s) \models A.$$

$S \models A$ è più forte della relazione "A è vera in tutte le interpretazioni in cui sono vere tutte le formule in S".

- $S \models A \Leftrightarrow$ per ogni $\mathcal{M}, s$: $[(\mathcal{M}, s) \models S \Rightarrow (\mathcal{M}, s) \models A]$
- A è vera in tutte le interpretazioni in cui sono vere tutte le formule in $S \Leftrightarrow$
  per ogni $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} \models S \Rightarrow \mathcal{M} \models A \Leftrightarrow$
  per ogni $\mathcal{M}$ [per ogni s : $(\mathcal{M}, s) \models S \Rightarrow$ per ogni s : $(\mathcal{M}, s) \models A$]

Infatti, per la proprietà 3 della slide 19:
per ogni $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \models p(x)$ allora $\mathcal{M} \models \forall x\, p(x)$.

Ma $p(x) \not\models \forall x\, p(x)$: Sia $\mathcal{M}$ con dominio $D = \{0, 1\}$ e $\mathcal{M}(p) = \{0\}$,
e s tale che $s(x) = 0$.

Allora $(\mathcal{M}, s) \models p(x)$, ma $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x\, p(x)$.

Quindi non per ogni $\mathcal{M}$ e s, se $(\mathcal{M}, s) \models p(x)$ allora $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, p(x)$.

Logica dei predicati e linguaggio naturale: quantificatore esistenziale

- Esiste un corvo nero: $\exists x(corvo(x) \wedge nero(x))$
  L'intersezione tra l'insieme dei corvi e quello degli oggetti neri non è vuota

Logica dei predicati e linguaggio naturale: quantificatore esistenziale

- Esiste un corvo nero: $\exists x(corvo(x) \wedge nero(x))$
  L'intersezione tra l'insieme dei corvi e quello degli oggetti neri non è vuota
- $\exists x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$ è vero in ogni interpretazione in cui esista un oggetto d^* che non è un corvo (oppure esiste almeno un oggetto nero d^*):

Se	$d^* \notin \mathcal{M}(corvo)$ (d^* non è un corvo)
oppure se	$d^* \in \mathcal{M}(nero)$ (d^* è nero)
allora per ogni s:	$(\mathcal{M}, s[d^*/x]) \not\models corvo(x)$ oppure
	$(\mathcal{M}, s[d^*/x]) \models nero(x)$.
Questo vale sse	$(\mathcal{M}, s[d^*/x]) \models corvo(x) \rightarrow nero(x)$,
che implica	esiste $d \in D$ tale che
	$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models corvo(x) \rightarrow nero(x)$,
cioè	$(\mathcal{M}, s) \models \exists x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$

$$\exists x(corvo(x) \rightarrow nero(x)) \quad \leftrightarrow \quad \exists x(\neg corvo(x) \vee nero(x))$$

Logica dei predicati e linguaggio naturale: quantificatore universale

- Tutti i corvi sono neri: $\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$
  L'insieme dei corvi è incluso nell'insieme degli oggetti neri

Logica dei predicati e linguaggio naturale: quantificatore universale

- Tutti i corvi sono neri: $\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$
  L'insieme dei corvi è incluso nell'insieme degli oggetti neri
- $\forall x(corvo(x) \wedge nero(x))$: tutti sono corvi e sono neri

$$\forall x(corvo(x) \wedge nero(x)) \quad \leftrightarrow \quad \forall x\, corvo(x) \wedge \forall x\, nero(x)$$

Affermazioni “vere a vuoto” (I)

$\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$ è vera in ogni interpretazione in cui non esistano corvi:

Per ogni $d \in D$, $d \notin \mathcal{M}(corvo)$ (non ci sono corvi)

vale sse: per ogni s e per ogni $d \in D$,
$(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models corvo(x)$.

Ciò implica che: per ogni s e per ogni $d \in D$,
$(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models corvo(x)$
oppure $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models nero(x)$,

che equivale a: per ogni s e per ogni $d \in D$,
$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models corvo(x) \rightarrow nero(x)$,

cioè: per ogni s, $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$.

$$\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x)) \quad \leftrightarrow \quad \forall x(\neg\, corvo(x) \vee nero(x))$$

Affermazioni "vere a vuoto" (I)

$\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$ è vera in ogni interpretazione in cui non esistano corvi:

Per ogni $d \in D$, $d \notin \mathcal{M}(corvo)$ (non ci sono corvi)

vale sse: per ogni s e per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models corvo(x)$.

Ciò implica che: per ogni s e per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models corvo(x)$ oppure $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models nero(x)$,

che equivale a: per ogni s e per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models corvo(x) \rightarrow nero(x)$,

cioè: per ogni s, $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$.

$$\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x)) \quad \leftrightarrow \quad \forall x(\neg\, corvo(x) \vee nero(x))$$

$\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$ è falsa sse esiste un oggetto d tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models corvo(x) \rightarrow nero(x)$, cioè tale che:

$$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models corvo(x) \text{ e } (\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models nero(x)$$

(esiste un corvo che non è nero: un controesempio)

In particolare, esiste un corvo.

Dunque, se non esistono corvi, $\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$ non può essere falsa, quindi è vera.

Affermazioni “vere a vuoto” (II)

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1, 3, 5, 7\}$ è dispari

Affermazioni “vere a vuoto” (II)

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1, 3, 5, 7\}$ è dispari
- Ogni numero in $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ è dispari. Perché?

Affermazioni “vere a vuoto” (II)

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1, 3, 5, 7\}$ è dispari
- Ogni numero in $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ è dispari. Perché?
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 8 è primo

Affermazioni “vere a vuoto” (II)

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1, 3, 5, 7\}$ è dispari
- Ogni numero in $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ è dispari. Perché?
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 8 è primo
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 10 è primo. Perché?

Affermazioni “vere a vuoto” (II)

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1, 3, 5, 7\}$ è dispari
- Ogni numero in $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ è dispari. Perché?
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 8 è primo
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 10 è primo. Perché?

È vero o falso che:

- Ogni numero appartenente all’insieme vuoto è dispari

Affermazioni “vere a vuoto” (II)

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1, 3, 5, 7\}$ è dispari
- Ogni numero in $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ è dispari. Perché?
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 8 è primo
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 10 è primo. Perché?

È vero o falso che:

- Ogni numero appartenente all’insieme vuoto è dispari
- Ogni numero maggiore di 10 e minore di 3 è primo

Affermazioni “vere a vuoto” (II)

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1, 3, 5, 7\}$ è dispari
- Ogni numero in $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ è dispari. Perché?
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 8 è primo
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 10 è primo. Perché?

È vero o falso che:

- Ogni numero appartenente all’insieme vuoto è dispari
- Ogni numero maggiore di 10 e minore di 3 è primo
- qualsiasi sia P: per ogni numero naturale $k < 0$ vale $P(k)$

Affermazioni “vere a vuoto” (II)

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1, 3, 5, 7\}$ è dispari
- Ogni numero in $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ è dispari. Perché?
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 8 è primo
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 10 è primo. Perché?

È vero o falso che:

- Ogni numero appartenente all’insieme vuoto è dispari
- Ogni numero maggiore di 10 e minore di 3 è primo
- qualsiasi sia P: per ogni numero naturale $k < 0$ vale $P(k)$
- Per ogni proprietà P, per ogni $k \in \emptyset$ vale $P(k)$

Affermazioni "vere a vuoto" (II)

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1, 3, 5, 7\}$ è dispari
- Ogni numero in $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ è dispari. Perché?
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 8 è primo
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 10 è primo. Perché?

È vero o falso che:

- Ogni numero appartenente all'insieme vuoto è dispari
- Ogni numero maggiore di 10 e minore di 3 è primo
- qualsiasi sia P: per ogni numero naturale $k < 0$ vale $P(k)$
- Per ogni proprietà P, per ogni $k \in \emptyset$ vale $P(k)$

Esercizi del paragrafo 3.6 delle dispense, pag. 65 e seguenti (in particolare, quelli dei gruppi F, G e N).

Alcune formule valide (dimostrarne la validità per esercizio)

$$\boxed{\forall x\, p(x) \rightarrow p(t)}$$

Assumiamo che la formula non sia valida: esiste una sua interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tali che $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x\, p(x) \rightarrow p(t)$; cioè:

- $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, p(x)$
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models p(x)$,
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(p)$;
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $d \in \mathcal{M}(p)$.
- $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t)$.
  Dunque, se $s(t) = d^*$, $d^* \notin \mathcal{M}(p)$. Contraddizione

Alcune formule valide (dimostrarne la validità per esercizio)

$$\boxed{\forall x\, p(x) \rightarrow p(t)}$$

Assumiamo che la formula non sia valida: esiste una sua interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tali che $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x\, p(x) \rightarrow p(t)$; cioè:

- $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, p(x)$
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models p(x)$,
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(p)$;
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $d \in \mathcal{M}(p)$.
- $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t)$.
  Dunque, se $s(t) = d^*$, $d^* \notin \mathcal{M}(p)$. Contraddizione

$$\boxed{\forall x\, A \equiv \neg \exists x \neg A} \qquad \boxed{\neg \forall x\, A \equiv \exists x \neg A}$$

Alcune formule valide (dimostrarne la validità per esercizio)

$$\boxed{\forall x\, p(x) \rightarrow p(t)}$$

Assumiamo che la formula non sia valida: esiste una sua interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tali che $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x\, p(x) \rightarrow p(t)$; cioè:

- $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, p(x)$
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models p(x)$,
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(p)$;
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $d \in \mathcal{M}(p)$.
- $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t)$.
  Dunque, se $s(t) = d^*$, $d^* \notin \mathcal{M}(p)$. Contraddizione

$$\boxed{\forall x\, A \equiv \neg\exists x \neg A} \qquad \boxed{\neg\forall x\, A \equiv \exists x \neg A}$$

$$\boxed{\exists x\, A \equiv \neg\forall x \neg A} \qquad \boxed{\neg\exists x\, A \equiv \forall x \neg A}$$

Alcune formule valide (dimostrarne la validità per esercizio)

$$\boxed{\forall x\, p(x) \rightarrow p(t)}$$

Assumiamo che la formula non sia valida: esiste una sua interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tali che $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x\, p(x) \rightarrow p(t)$; cioè:

- $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, p(x)$
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models p(x)$,
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(p)$;
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $d \in \mathcal{M}(p)$.
- $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t)$.
  Dunque, se $s(t) = d^*$, $d^* \notin \mathcal{M}(p)$. Contraddizione

$$\boxed{\forall x\, A \equiv \neg\exists x \neg A} \qquad \boxed{\neg\forall x\, A \equiv \exists x \neg A}$$

$$\boxed{\exists x\, A \equiv \neg\forall x \neg A} \qquad \boxed{\neg\exists x\, A \equiv \forall x \neg A}$$

$$\boxed{\forall x (A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B} \qquad \boxed{\exists x (A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists B}$$

Alcune formule valide (dimostrarne la validità per esercizio)

$$\boxed{\forall x\, p(x) \rightarrow p(t)}$$

Assumiamo che la formula non sia valida: esiste una sua interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tali che $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x\, p(x) \rightarrow p(t)$; cioè:

- $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, p(x)$
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models p(x)$,
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(p)$;
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $d \in \mathcal{M}(p)$.
- $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t)$.
  Dunque, se $s(t) = d^*$, $d^* \notin \mathcal{M}(p)$. Contraddizione

$\boxed{\forall x\, A \equiv \neg \exists x \neg A}$	$\boxed{\neg \forall x\, A \equiv \exists x \neg A}$
$\boxed{\exists x\, A \equiv \neg \forall x \neg A}$	$\boxed{\neg \exists x\, A \equiv \forall x \neg A}$
$\boxed{\forall x (A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B}$	$\boxed{\exists x (A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists B}$
$\boxed{\forall x A \vee \forall x B \rightarrow \forall x (A \vee B)}$	$\boxed{\exists x (A \wedge B) \rightarrow \exists x A \wedge \exists x B}$

Alcune formule valide (dimostrarne la validità per esercizio)

$$\boxed{\forall x\, p(x) \to p(t)}$$

Assumiamo che la formula non sia valida: esiste una sua interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tali che $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x\, p(x) \to p(t)$; cioè:

- $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, p(x)$
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models p(x)$,
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(p)$;
  $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $d \in \mathcal{M}(p)$.
- $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t)$.
  Dunque, se $s(t) = d^*$, $d^* \notin \mathcal{M}(p)$. Contraddizione

$\forall x\, A \equiv \neg\exists x \neg A$	$\neg\forall x\, A \equiv \exists x \neg A$
$\exists x\, A \equiv \neg\forall x \neg A$	$\neg\exists x\, A \equiv \forall x \neg A$
$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B$	$\exists x(A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists B$
$\forall x A \vee \forall x B \to \forall x(A \vee B)$	$\exists x(A \wedge B) \to \exists x A \wedge \exists x B$

$$\boxed{\exists y \forall x A \to \forall x \exists y A}$$

Alcune formule non valide

1. $(\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \rightarrow \forall x (p(x) \rightarrow q(x))$
   $\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)$ è vera quando $\forall x p(x)$ è falsa (non tutti gli oggetti del dominio sono in $\mathcal{M}(p)$). Ma non è detto che, in questo caso, ogni oggetto in $\mathcal{M}(p)$ sia anche in $\mathcal{M}(q)$.
   Contromodello: $D = \{0, 1\}$, $\mathcal{M}(p) = \{0\}$, $\mathcal{M}(q) = \emptyset$.
2. $\forall x (p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$
   Pensare alle interpretazioni di p e q: “essere pari” e “essere dispari”
3. $\exists x p(x) \wedge \exists x q(x) \rightarrow \exists x (p(x) \wedge q(x))$
   Come al punto precedente
4. $\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$
   Pensare alla differenza tra continuità (per ogni $x_0 \in I$ esiste $\delta > 0$ ... : δ dipende da x_0) e continuità uniforme (esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x_0 \in I$ ... : δ è lo stesso per ogni punto)

Esercizio: completare le dimostrazioni della non validità di tali formule

Come fare per ...

Dimostrare che:

- la formula A è valida: per assurdo; si assume che esista un contromodello $(\mathcal{M}, s)$ di A e si giunge ad un assurdo;
- la formula A non è valida: si costruisce un contromodello: $(\mathcal{M}, s) \not\models A$

Dimostrare che:

- $S \models A$:
  - per assurdo: si assume che esistano un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s, tali che $(\mathcal{M}, s) \models S$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models A$, e si giunge ad un assurdo;
  - dimostrazione diretta: si assume che $\mathcal{M}$ e s siano qualsiasi interpretazione e assegnazione tali che $(\mathcal{M}, s) \models S$, e si dimostra che $(\mathcal{M}, s) \models A$
- $S \not\models A$: si costruisce un contromodello, cioè un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s, tali che $(\mathcal{M}, s) \models S$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models A$.

Forme normali prenesse

Una formula è in forma normale prenessa se ha la forma:

$$\underbrace{Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n}_{prefisso} \underbrace{A}_{matrice}$$

dove la matrice è senza quantificatori

Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in forma normale prenessa.

Equivalenze logiche utili per trasformare una formula in forma prenessa:

- Ridenominazione di variabili vincolate:

$$\left.\begin{array}{lcl} \forall xA & \leftrightarrow & \forall yA[y/x] \\ \exists xA & \leftrightarrow & \exists yA[y/x] \end{array}\right\} \; y \text{ nuova}$$

- Se x non occorre in B, allora:

$$\begin{array}{rcl} \forall xA \wedge B & \leftrightarrow & \forall x(A \wedge B) \\ \forall xA \vee B & \leftrightarrow & \forall x(A \vee B) \\ \mathbf{\forall xA \rightarrow B} & \leftrightarrow & \mathbf{\exists x(A \rightarrow B)} \\ B \rightarrow \forall xA & \leftrightarrow & \forall x(B \rightarrow A) \\ \mathbf{\neg \forall xA} & \leftrightarrow & \mathbf{\exists x \neg A} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \exists xA \wedge B & \leftrightarrow & \exists x(A \wedge B) \\ \exists xA \vee B & \leftrightarrow & \exists x(A \vee B) \\ \mathbf{\exists xA \rightarrow B} & \leftrightarrow & \mathbf{\forall x(A \rightarrow B)} \\ B \rightarrow \exists xA & \leftrightarrow & \exists x(B \rightarrow A) \\ \mathbf{\neg \exists xA} & \leftrightarrow & \mathbf{\forall x \neg A} \end{array}$$

Trasformazione di formule in forma prenessa: Esempio

$$\neg(\forall x \exists y\, p(x, y) \vee (\, \boldsymbol{\forall x}\;\; p(\, \boldsymbol{x}\;, c) \rightarrow \boldsymbol{\exists y}\;\; q(\, \boldsymbol{y}\;)))$$

Trasformazione di formule in forma prenessa: Esempio

$$\neg(\forall x \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x}\ p(\boldsymbol{x}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\ q(\boldsymbol{y})))$$

$$\Rightarrow \quad \neg(\forall \boldsymbol{x}\ \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x_1}\ p(\boldsymbol{x_1}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y_1}\ q(\boldsymbol{y_1})))$$

Trasformazione di formule in forma prenessa: Esempio

$$\neg(\forall x \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x}\ p(\boldsymbol{x}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\ q(\boldsymbol{y})))$$

$$\Rightarrow \quad \neg(\forall \boldsymbol{x}\, \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x_1}\ p(\boldsymbol{x_1}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y_1}\ q(\boldsymbol{y_1})))$$

$$\Rightarrow \quad \neg \forall \boldsymbol{x}\, (\exists \boldsymbol{y}\ p(x,y) \vee \exists x_1\, (p(x_1, c) \rightarrow \exists y_1\, q(y_1)))$$

Trasformazione di formule in forma prenessa: Esempio

$$\neg(\forall x \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x}\ p(\boldsymbol{x}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\ q(\boldsymbol{y})))$$

$$\Rightarrow \quad \neg(\forall \boldsymbol{x}\, \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x_1}\ p(\boldsymbol{x_1}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y_1}\ q(\boldsymbol{y_1})))$$

$$\Rightarrow \quad \neg \forall \boldsymbol{x}\, (\exists \boldsymbol{y}\ p(x,y) \vee \exists x_1 (p(x_1, c) \rightarrow \exists y_1\, q(y_1)))$$

$$\Rightarrow \quad \neg \forall x\, \exists \boldsymbol{y}\ (p(x,y) \vee \exists \boldsymbol{x_1} \exists \boldsymbol{y_1}\ (p(x_1, c) \rightarrow q(y_1)))$$

Trasformazione di formule in forma prenessa: Esempio

$\neg(\forall x \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x}\ p(\boldsymbol{x}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\ q(\boldsymbol{y})))$

$\Rightarrow \quad \neg(\forall \boldsymbol{x}\, \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x_1}\ p(\boldsymbol{x_1}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y_1}\ q(\boldsymbol{y_1})))$

$\Rightarrow \quad \neg \forall \boldsymbol{x}\, (\exists \boldsymbol{y}\ p(x,y) \vee \exists x_1\, (p(x_1,c) \rightarrow \exists y_1\, q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \neg \forall x\, \exists \boldsymbol{y}\ (p(x,y) \vee \exists \boldsymbol{x_1} \exists \boldsymbol{y_1}\ (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \neg \forall \boldsymbol{x}\, \exists y\, \exists \boldsymbol{x_1} \exists \boldsymbol{y_1}\ (p(x,y) \vee (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$

Trasformazione di formule in forma prenessa: Esempio

$\neg(\forall x \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x}\ p(\boldsymbol{x}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\ q(\boldsymbol{y})))$

$\Rightarrow \quad \neg(\forall \boldsymbol{x}\, \exists y\, p(x,y) \vee (\forall \boldsymbol{x_1}\ p(\boldsymbol{x_1}, c) \rightarrow \exists \boldsymbol{y_1}\ q(\boldsymbol{y_1})))$

$\Rightarrow \quad \neg \forall \boldsymbol{x}\, (\exists \boldsymbol{y}\ p(x,y) \vee \exists x_1 (p(x_1, c) \rightarrow \exists y_1\, q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \neg \forall x\, \exists \boldsymbol{y}\ (p(x,y) \vee \exists \boldsymbol{x_1} \exists \boldsymbol{y_1}\ (p(x_1, c) \rightarrow q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \neg \forall \boldsymbol{x}\, \exists y\, \exists \boldsymbol{x_1} \exists \boldsymbol{y_1}\ (p(x,y) \vee (p(x_1, c) \rightarrow q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \exists \boldsymbol{x}\ \neg \exists \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{x_1} \exists \boldsymbol{y_1}\ (p(x,y) \vee (p(x_1, c) \rightarrow q(y_1)))$

Trasformazione di formule in forma prenessa: Esempio

$\neg(\forall x \exists y\, p(x,y) \vee (\forall x\ p(x,c) \rightarrow \exists y\ q(y)))$

$\Rightarrow \quad \neg(\forall x\, \exists y\, p(x,y) \vee (\forall x_1\ p(x_1,c) \rightarrow \exists y_1\ q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \neg\, \forall x\, (\exists y\ p(x,y) \vee \exists x_1\, (p(x_1,c) \rightarrow \exists y_1\, q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \neg \forall x\, \exists y\ (p(x,y) \vee \exists x_1 \exists y_1\ (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \neg \forall x\, \exists y\, \exists x_1 \exists y_1\ (p(x,y) \vee (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \exists x\ \neg \exists y \exists x_1 \exists y_1\ (p(x,y) \vee (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$

$\Rightarrow \quad \exists x\, \forall y \forall x_1 \forall y_1\ \neg(p(x,y) \vee (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$

Sostituzione di variabili con termini

Abbiamo visto che $\models \forall x\, p(x) \to p(t)$

Ma è sempre vero che $\models \forall x A \to A[t/x]$?

Esempio: $\forall x \exists y\, (x < y)$ è vero nell'interpretazione standard su $\mathbb{N}$

Quindi anche $\exists y\, (0 < y)$, $\exists y\, (1 < y)$, ..., $\exists y\, (2 + 1 < y)$

Consideriamo $t = y + 1$ e $\exists y\, (x < y)[t/x]$: è vero che $\exists y\, (y + 1 < y)$?

Sostituzione di variabili con termini

Abbiamo visto che $\models \forall x\, p(x) \rightarrow p(t)$

Ma è sempre vero che $\models \forall x A \rightarrow A[t/x]$?

Esempio: $\forall x \exists y\,(x < y)$ è vero nell'interpretazione standard su $\mathbb{N}$

Quindi anche $\exists y\,(0 < y)$, $\exists y\,(1 < y)$, ..., $\exists y\,(2 + 1 < y)$

Consideriamo $t = y + 1$ e $\exists y\,(x < y)[t/x]$: è vero che $\exists y\,(y + 1 < y)$?

Non per ogni termine t : $\not\models \forall x \exists y\,(x < y) \rightarrow \exists y\,(t < y)$

$A[t/x]$ non "dice" sempre di t quello che A dice di x:

$\exists y\,(x < y)$ "dice" che esiste un numero maggiore di x,
ma $\exists y\,(y + 1 < y)$ non dice che esiste un numero maggiore di $y + 1$.

Ci si deve assicurare che nessuna variabile in t venga "catturata" da un quantificatore in A

Termini sostituibili per una variabile in una formula

t è **sostituibile per x in A** sse nessuna occorrenza **libera** di x in A si trova nel campo d'azione di un quantificatore $\forall y$ o $\exists y$, dove y occorre in t

(nessuna variabile di t verrebbe "catturata" da un quantificatore in A, se x venisse sostituita da t)

$f(y)$ è sostituibile per x in $\forall z P(z, x)$,
è sostituibile per x in $\forall x P(z, x)$,
non è sostituibile per x in $\forall y P(y, x)$,
non è sostituibile per x in $\exists y P(y, x)$

Se t è sostituibile per x in A, allora

$$\models \forall x A \rightarrow A[t/x]$$

$$\models A[t/x] \rightarrow \exists x A$$

Se t è un termine chiuso, o se $t = x$, allora t è sostituibile per x in A, quindi $\models \forall x A \rightarrow A[t/x]$

Quando scriviamo $A[t/x]$, intendiamo sempre che t è sostituibile per x in A

Sistema di inferenza hilbertiano

- Linguaggio del primo ordine con $\rightarrow$, $\neg$ e $\forall$
- Assiomi:
  1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$
  4. $\forall x A \rightarrow A[t/x]$ se t è sostituibile per x in A
  5. $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$ se A non contiene x libera
- Regole di inferenza:
  1. MPP: $\dfrac{A \quad A \rightarrow B}{B}$
  2. Generalizzazione $\dfrac{A}{\forall x A}$

Gli altri connettivi e $\exists$ sono simboli definiti

Teorie del primo ordine

Linguaggio del primo ordine

Sistema di inferenza :

- assiomi logici
- regole di inferenza
- **assiomi propri** (o non logici), che descrivono il dominio di interesse

Il sistema costituito dai soli assiomi logici e regole di inferenza è il

Calcolo dei Predicati del Primo Ordine

Esempi di teorie (I)

- Teoria dei grafi non orientati
  $\mathcal{P} = \{R^2\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
  Assioma proprio: $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
- Teoria degli ordini parziali
  $\mathcal{P} = \{<\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$

  Assiomi propri: $\forall x \neg (x < x)$
  $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
- Teorie con uguaglianza, dove i simboli di predicato includono $=$

  Assiomi propri: $\forall x (x = x)$ (riflessivita')
  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow (A \rightarrow A'))$
  dove A' si ottiene da A sostituendo alcune (non necessariamente tutte) occorrenze libere di x con y

  Sono derivabili:

  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$
  $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$

Esempi di teorie (II)

- Teoria dei numeri
  $\mathcal{P} = \{=\}, \quad \mathcal{F} = \{succ, +, \times\}, \quad \mathcal{C} = \{0\}$
  Assiomi propri: assiomi per l'uguaglianza +
  $\forall x \neg(0 = succ(x))$
  $\forall x \forall y(succ(x) = succ(y) \rightarrow x = y)$
  $\forall x(x + 0 = x)$
  $\forall x \forall y(x + succ(y) = succ(x + y))$
  $\forall x(x \times 0 = 0)$
  $\forall x \forall y(x \times succ(y) = x + (x \times y))$
  $A[0/x] \wedge \forall x(A \rightarrow A[succ(x)/x]) \rightarrow \forall x A$
  (schema d'assiomi: principio di induzione matematica)

Proprietà della logica dei predicati

- **Semidecidibilità**
  Se $\mathcal{I}$ è un sistema di inferenza, in cui la proprietà di essere un assioma di $\mathcal{I}$ e la relazione di derivabilità mediante ciascuna regola di inferenza di $\mathcal{I}$ sono nozioni decidibili, e se il linguaggio è numerabile, allora la nozione di derivabilità in $\mathcal{I}$ è semidecidibile:

  $S \vdash_{\mathcal{I}} A$ **è semidecidibile**

  (l'insieme delle formule valide è ricorsivamente enumerabile)
- **Indecidibilità**
  Il calcolo dei predicati è indecidibile:
  > Se $\mathcal{L}$ è un linguaggio con almeno una costante e un simbolo di predicato binario, allora l'insieme delle formule valide di $\mathcal{L}$ non è ricorsivo

  Casi di decidibilità:
  - calcolo monadico (i predicati sono tutti a un solo argomento)
  - formule puramente esistenziali: $\exists x_1 \ldots \exists x_n A$, dove A è senza quantificatori né simboli funzionali
  - formule puramente universali: $\forall x_1 \ldots \forall x_n A$, dove A è senza quantificatori né simboli funzionali