Deduzione automatica: sostituzioni e unificazione

Una **sostituzione** è un insieme finito della forma:

$$\{t_1/x_1, ..., t_n/x_n\}$$

dove:

- $x_1, ..., x_n$ sono variabili
- $t_1, ..., t_n$ sono termini
- per ogni i, $t_i \neq x_i$
- per ogni i, j se $i \neq j$ allora $x_i \neq x_j$

Applicazione di una sostituzione a un'espressione:
se E è un'espressione e $\theta = \{t_1/x_1, ..., t_n/x_n\}$ una sostituzione, $\boldsymbol{E\theta}$ è l'**istanza** di E che si ottiene sostituendo **simultaneamente** ogni occorrenza di x_i con t_i (per $1 \leq i \leq n$).

Esempio:

$$\text{se } \theta = \{f(z,z)/x, c/z\}$$

$$p(f(x,y), x, g(z))\theta = p(f(f(z,z),y), f(z,z), g(c))$$

Composizione di sostituzioni ($\theta \circ \sigma$)

Se $\theta = \{t_1/x_1, ..., t_n/x_n\}$ e $\sigma = \{u_1/y_1, ..., u_m/y_m\}$, allora

$$\theta \circ \sigma$$

si ottiene da

$$\{t_1\sigma/x_1, ..., t_n\sigma/x_n, u_1/y_1, ..., u_m/y_m\}$$

eliminando tutti gli elementi:

$$t_j\sigma/x_j \text{ tali che } t_j\sigma = x_j$$
$$u_i/y_i \text{ tali che } y_i \in \{x_1, ..., x_n\}$$

Esempio

$$\theta = \{f(y)/x, z/y\}$$
$$\sigma = \{a/x, b/y, y/z\}$$

$\theta \circ \sigma$ si ottiene da

$$\{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}$$

eliminando $a/x, b/y, y/y$:

$$\theta \circ \sigma = \{f(b)/x, y/z\}$$

Proprietà fondamentale della composizione di sostituzioni

Per ogni espressione E:

$$E(\theta \circ \sigma) \ = \ (E\theta)\sigma$$

Esempio: siano

$$\begin{array}{rcl} E & = & h(x, g(y), z) \\ \theta & = & \{f(y)/x, z/y\} \\ \sigma & = & \{a/x, b/y, y/z\} \\ \theta \circ \sigma & = & \{f(b)/x, y/z\} \end{array}$$

$$h(x, g(y), z)(\theta \circ \sigma) = h(x, g(y), z)\{f(b)/x, y/z\} = h(f(b), g(y), y)$$

$$(h(x, g(y), z)\theta)\sigma = h(f(y), g(z), z)\sigma = h(f(b), g(y), y)$$

Unificazione

Una sostituzione θ è un **unificatore** per l'insieme di espressioni $\{E_1, ..., E_k\}$ sse:

$$E_1\theta = E_2\theta = ... = E_k\theta$$

L'insieme $\{E_1, ..., E_k\}$ è **unificabile** sse esiste un unificatore per esso

Unificatore più generale

Un unificatore σ per $\{E_1, ..., E_k\}$ è un unificatore più generale (**mgu** = most general unifier) di $\{E_1, ..., E_k\}$ sse per ogni unificatore θ di $\{E_1, ..., E_k\}$ esiste una sostituzione λ tale che $\theta = \sigma \circ \lambda$.

Cioè ogni altro unificatore θ dell'insieme di espressioni "sostituisce di più" di σ: per ogni espressione E

$$E\theta = (E\sigma)\lambda$$

Esempio

$\theta = \{f(a)/x, a/y\}$ è un unificatore per $\{p(x), p(f(y))\}$, ma non è un mgu.

Infatti per "unificare" $p(x)$ con $p(f(y))$ è sufficiente sostituire x con $f(y)$:

$$\sigma = \{f(y)/x\} \text{ è un mgu di } \{p(x), p(f(y))\}$$

$\theta = \sigma \circ \{a/y\}$, ma d'altra parte non esiste alcuna sostituzione λ tale che $\sigma = \theta \circ \lambda$.

Se σ è un mgu per $\{E_1, ..., E_k\}$, vuol dire che:

- σ è un unificatore: $E_1\sigma = E_2\sigma = ... = E_k\sigma$
- σ è più generale: se $E_1\theta = E_2\theta = ... = E_k\theta$
  allora per qualche λ: $E_i\theta = (E_i\sigma)\lambda$
  (θ è "meno generale": sostituisce più del necessario)

Perché diciamo “un” unificatore più generale?

L’mgu di un insieme di espressioni non è necessariamente unico.

Ad esempio, consideriamo l’insieme di espressioni $S = \{p(x), p(y)\}$:

- $\sigma_1 = \{x/y\}$ è un mgu di S
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ è un mgu di S

σ_1 e σ_2 sono “ugualmente generali”:

$$\sigma_1 = \{x/y\} = \sigma_2 \circ \{x/y\} = \{y/x\} \circ \{x/y\}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{y/x\}$$

Perché diciamo “un” unificatore più generale?

L’mgu di un insieme di espressioni non è necessariamente unico.

Ad esempio, consideriamo l’insieme di espressioni $S = \{p(x), p(y)\}$:

- $\sigma_1 = \{x/y\}$ è un mgu di S
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ è un mgu di S

σ_1 e σ_2 sono “ugualmente generali”:

$$\sigma_1 = \{x/y\} = \sigma_2 \circ \{x/y\} = \{y/x\} \circ \{x/y\}$$
$$\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{y/x\}$$

- $\sigma_3 = \{z/y, z/x\}$ è un mgu di S

$$\sigma_1 = \{x/y\} = \sigma_3 \circ \{x/z\} = \{z/y, z/x\} \circ \{x/z\}$$
$$\sigma_3 = \{z/y, z/x\} = \sigma_1 \circ \{z/y, z/x\} = \{x/y\} \circ \{z/y, z/x\}$$

Anche σ_1 e σ_3 sono “ugualmente generali”

Algoritmo di unificazione di Robinson per due espressioni

Definizione. Siano A e B due espressioni e sia k la posizione più a sinistra in cui le due sequenze di simboli differiscono. L'insieme $\{e_1, e_2\}$ delle due **sottoespressioni** che iniziano alla posizione k in A e B si chiama il ***disagreement set*** di A e B.

Sottoespressione di un'espressione E: sottosequenza dei simboli di E che costituisce essa stessa un'espressione

Esempio: se $A = p(x, f(c), x)$, $B = p(x, g(y, a), z)$, il disagreement set di A e B è:

$$\{f(c), g(y, a)\}$$

Algoritmo di unificazione per due espressioni

Algoritmo: calcola $mgu(A, B)$

- Inizializzazione:

$$\begin{array}{ll} A_0 = A & \sigma_0 = \emptyset \\ B_0 = B & i = 0 \end{array}$$

- Ciclo:
  - Se $A_i = B_i$: uscire dal ciclo, con risultato σ_i, altrimenti proseguire
  - Sia $\{e, e'\}$ il disagreement set di A_i e B_i. Consideriamo i seguenti casi:
    1. se un elemento di $\{e, e'\}$ è una variabile x_i e l'altro un'espressione e_i **in cui non occorre** x_i, allora porre:

$$\begin{array}{r} \sigma_{i+1} = \sigma_i \circ \{e_i/x_i\} \\ A_{i+1} = A_i\{e_i/x_i\} \\ B_{i+1} = B_i\{e_i/x_i\} \end{array}$$

       e proseguire nel ciclo.
    2. altrimenti uscire dal ciclo e riportare un fallimento: $\{e, e'\}$ non è unificabile

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$
- $A_0 \neq B_0$
  disagreement set:

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$
- $A_0 \neq B_0$
  disagreement set: $\{a, y\}$
  y non occorre in a, quindi:
  $\sigma_1 =$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$
- $A_0 \neq B_0$
  disagreement set: $\{a, y\}$
  y non occorre in a, quindi:
  $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$
  $A_1 =$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$
- $A_0 \neq B_0$
  disagreement set: $\{a, y\}$
  y non occorre in a, quindi:
  $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$
  $A_1 = A_0\,\sigma_1 = p(a, x)\,\{a/y\} = p(a, x)$
  $B_1 =$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$
- $A_0 \neq B_0$
  disagreement set: $\{a, y\}$
  y non occorre in a, quindi:
  $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$
  $A_1 = A_0\,\sigma_1 = p(a, x)\,\{a/y\} = p(a, x)$
  $B_1 = B_0\,\sigma_1 = p(y, f(y))\,\{a/y\} = p(a, f(a))$
- $A_1 \neq B_1$
  disagreement set:

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$
- $A_0 \neq B_0$
  disagreement set: $\{a, y\}$
  y non occorre in a, quindi:
  $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$
  $A_1 = A_0\,\sigma_1 = p(a, x)\,\{a/y\} = p(a, x)$
  $B_1 = B_0\,\sigma_1 = p(y, f(y))\,\{a/y\} = p(a, f(a))$
- $A_1 \neq B_1$
  disagreement set: $\{x, f(a)\}$
  x non occorre in $f(a)$, quindi:
  $\sigma_2 =$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$
- $A_0 \neq B_0$
  disagreement set: $\{a, y\}$
  y non occorre in a, quindi:
  $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$
  $A_1 = A_0\,\sigma_1 = p(a, x)\,\{a/y\} = p(a, x)$
  $B_1 = B_0\,\sigma_1 = p(y, f(y))\,\{a/y\} = p(a, f(a))$
- $A_1 \neq B_1$
  disagreement set: $\{x, f(a)\}$
  x non occorre in $f(a)$, quindi:
  $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{f(a)/x\} = \{a/y\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/y, f(a)/x)\}$
  $A_2 =$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$
- $A_0 \neq B_0$
  disagreement set: $\{a, y\}$
  y non occorre in a, quindi:
  $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$
  $A_1 = A_0\,\sigma_1 = p(a, x)\,\{a/y\} = p(a, x)$
  $B_1 = B_0\,\sigma_1 = p(y, f(y))\,\{a/y\} = p(a, f(a))$
- $A_1 \neq B_1$
  disagreement set: $\{x, f(a)\}$
  x non occorre in $f(a)$, quindi:
  $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{f(a)/x\} = \{a/y\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/y, f(a)/x)\}$
  $A_2 = A_1\,\sigma_2 = p(a, x)\,\{a/y, f(a)/x\} = p(a, f(a))$
  $B_2 =$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$
- $A_0 \neq B_0$
  disagreement set: $\{a, y\}$
  y non occorre in a, quindi:
  $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$
  $A_1 = A_0\,\sigma_1 = p(a, x)\,\{a/y\} = p(a, x)$
  $B_1 = B_0\,\sigma_1 = p(y, f(y))\,\{a/y\} = p(a, f(a))$
- $A_1 \neq B_1$
  disagreement set: $\{x, f(a)\}$
  x non occorre in $f(a)$, quindi:
  $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{f(a)/x\} = \{a/y\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/y, f(a)/x)\}$
  $A_2 = A_1\,\sigma_2 = p(a, x)\,\{a/y, f(a)/x\} = p(a, f(a))$
  $B_2 = B_1\,\sigma_2 = p(a, f(a))\,\{a/y, f(a)/x)\} = p(a, f(a))$
- $A_2 = B_2$, quindi l'mgu di A e B è $\sigma_2 = \{a/y, f(a)/x)\}$

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\ \mathbf{a}\ , x)$	$p(\ \mathbf{y}\ , f(y))$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	**fallimento**

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	**fallimento**

Esempio 4

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, a)$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	**fallimento**

Esempio 4

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, a)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{a})$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	**fallimento**

Esempio 4

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, a)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{a})$	**fallimento**

Esercizio 7 del Paragrafo 4.6 delle Dispense

Si mostrino l'esecuzione, stadio per stadio, ed il risultato dell'algoritmo di unificazione di Robinson sulle seguenti coppie di espressioni:

1. $A = p(x)$, $B = p(f(y))$
2. $A = p(x, f(a))$, $B = p(c, f(x))$
3. $A = p(x, f(a))$, $B = p(c, f(y))$
4. $A = p(x, x)$, $B = p(f(y), y)$
5. $A = p(x, f(c), x)$, $B = p(f(y), y, z)$
6. $A = p(x, f(c), x)$, $B = p(f(y), y, c)$