Logica: materiale didattico

M. Cialdea Mayer. Logica (dispense):

http://cialdea.dia.uniroma3.it/teaching/logica/materiale/dispense-logica.pdf

LOGICA

DISPENSE PER IL CORSO DI LOGICA PER L'INFORMATICA
A.A. 2013/2014

(ESTRATTE DAL LIBRO: M. CIALDEA MAYER. *Logica. Linguaggio, ragionamento, calcolo.* ESCULAPIO, 2002, CON ALCUNE INTEGRAZIONI E CORREZIONI)

Logica Formale

- LOGICA “FORMALE”: studio della forma, astrazione dal contenuto
- LOGICA “SIMBOLICA”: formalizzazione mediante simboli
- LOGICA “MATEMATICA”: studio della forma del ragionamento matematico (logica classica)

Una logica è definita da:

- un **Linguaggio formale** (sintassi + semantica)

  Sintassi: insieme delle espressioni ben formate (linguaggio)
  Semantica: interpretazione $\mathcal{M}$ del linguaggio e nozione di verità

- un **Sistema di inferenza**

Logiche (al plurale)

- **Logica classica**:
  - **Logica proposizionale**: proposizioni + connettivi
  - **Logica dei predicati** (o logica del primo ordine): termini + predicati + connettivi + quantificatori
- **Logiche non classiche**:
  - **Logica temporale**:

    operatori: “sarà sempre vero che ...”,
    “in qualche momento futuro sarà vero che ...”,
    “*A* è vero fino a che è vero *B*”
  - Logica epistemica:

    operatori “l’agente sa che ...”,
    “l’agente crede che ...”

Logica classica (proposizionale e dei predicati)

Rappresentazione di conoscenza **dichiarativa** e studio delle forme di ragionamento su questo tipo di conoscenza

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B} \qquad\qquad \frac{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \qquad A(c)}{B(c)}$$

- Elementi di base: **formule** (o enunciati), che possono essere **VERE** o **FALSE**
- Gli enunciati si costruiscono a partire da **formule atomiche**, mediante l'uso di **operatori logici**.
- **Logica proposizionale**:
  - le formule atomiche sono **atomi** o **variabili proposizionali**, non ulteriormente analizzabili.
  - Gli operatori logici sono i **connettivi proposizionali**: $\neg$ (NOT), $\wedge$ (AND), $\vee$ (OR), $\rightarrow$ (se/allora), $\equiv$ (se e solo se)
- **Logica dei predicati**:
  - le formule atomiche sono strutture costruite sulla base di simboli di **relazione** e **termini**.
  - Gli operatori logici includono i **quantificatori**: $\forall$ (per ogni) e $\exists$ (esiste)

Logica Proposizionale Classica

Prerequisito per il corso

http://cialdea.dia.uniroma3.it/teaching/logica/materiale/dispense-logica.pdf

Capitolo 1

Logica Proposizionale Classica: sintassi

La sintassi di un linguaggio determina quali sono le espressioni corrette del linguaggio.

Espressioni della logica: formule

Alfabeto di un linguaggio proposizionale:

$$P \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv, \top, \bot, (,)\}$$

dofe P è un insieme di variabili proposizionali (o atomi).

Definizione induttiva dell'insieme
Prop[*P*] delle formule costruite sulla base di P:

1. ogni variabile proposizionale è una formula
2. $\top$ e $\bot$ sono formule
3. se A è una formula, allora anche $\neg A$ è una formula
4. se A e B sono formule, allora anche $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \equiv B)$ sono formule
5. nient'altro è una formula

Logica proposizionale: interpretazioni

La semantica di una logica mette in relazione il linguaggio con una struttura matematica definita formalmente

$$\boxed{\text{Linguaggio}} \Longrightarrow \boxed{\text{Dominio}}$$

$$\boxed{\text{Prop[P]}} \Longrightarrow \boxed{Bool = \{T, F\}}$$

La semantica stabilisce il significato degli operatori logici: quella della logica proposizionale, il significato dei connettivi.

Il significato **simboli non logici** (variabili proposizionali) può variare (possono essere interpretati in modi diversi).

Interpretazione di un linguaggio: determina come interpretare i **simboli non logici**.

Interpretazione del linguaggio P

$\mathcal{M}$: assegnazione di un booleano (valore di verità) a ogni variabile in P:

$$\mathcal{M} : \ P \longrightarrow Bool$$

Logica proposizionale: nozione di verità

$\mathcal{M} \models A$: A è **vera** in $\mathcal{M}$
($\mathcal{M} \not\models A$: A non è vera in $\mathcal{M}$)

Sia $\mathcal{M} : P \longrightarrow Bool$.
$\mathcal{M} \models A$ è definito per induzione su A:

1. $\mathcal{M} \models p$ sse $\mathcal{M}(p) = T$, se $p \in P$;
2. $\mathcal{M} \models \top$ e $\mathcal{M} \not\models \bot$;
3. $\mathcal{M} \models \neg A$ sse $\mathcal{M} \not\models A$
4. $\mathcal{M} \models A \wedge B$ sse $\mathcal{M} \models A$ e $\mathcal{M} \models B$
5. $\mathcal{M} \models A \vee B$ sse $\mathcal{M} \models A$ oppure $\mathcal{M} \models B$
6. $\mathcal{M} \models A \rightarrow B$ sse $\mathcal{M} \not\models A$ oppure $\mathcal{M} \models B$
7. $\mathcal{M} \models A \equiv B$ sse $\mathcal{M} \models A$ e $\mathcal{M} \models B$, oppure $\mathcal{M} \not\models A$ e $\mathcal{M} \not\models B$

Questa definizione stabilisce il significato degli operatori logici.

Il significato di $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (OR inclusivo) vi è familiare

$A \rightarrow B$ è falsa solo quando A è vera e B è falsa (**implicazione materiale**).

$A \equiv B$: l'interpretazione di A e B è uguale

Modelli, contromodelli, formule soddisfacibili

- Una interpretazione $\mathcal{M}$ è un **modello** di F (o *soddisfa* F) sse $\mathcal{M} \models F$.
- Una interpretazione $\mathcal{M}$ è un **contromodello** di F sse $\mathcal{M} \not\models F$.
- F è **soddisfacibile** sse esiste un modello di F.
- Le nozioni di modello, contromodello e soddisfacibilità si estendono a insiemi di formule. Se S è un insieme di formule:
  - $\mathcal{M} \models S$ sse per ogni $A \in S$, $\mathcal{M} \models A$.
  - $\mathcal{M}$ è un contromodello di S ($\mathcal{M} \not\models S$) sse esiste una formula $A \in S$ tale che $\mathcal{M} \not\models A$.
  - S è soddisfacibile se esiste un modello di S.

Osservazione: le nozioni di modello, contromodello e soddisfacibilità sono generali: sono le stesse per ogni logica – modulo la nozione di "$\mathcal{M} \models A$"

Formule logicamente valide

- F è **logicamente valida** ($\models F$) se e solo se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di F, $\mathcal{M} \models F$; cioè se non esistono contromodelli di F

Attenzione: non confondere i due termini

vero: la verità è una relazione tra un'interpretazione e una formula: $\mathcal{M} \models A$

valido: la validità è una proprietà delle formule (indipendente dalle singole interpretazioni): $\models A$.

(anche se si utilizza lo stesso simbolo $\models$)

Formule logicamente valide

- F è **logicamente valida** ($\models F$) se e solo se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di F, $\mathcal{M} \models F$; cioè se non esistono contromodelli di F

Attenzione: non confondere i due termini

vero: la verità è una relazione tra un'interpretazione e una formula: $\mathcal{M} \models A$

valido: la validità è una proprietà delle formule (indipendente dalle singole interpretazioni): $\models A$.

(anche se si utilizza lo stesso simbolo $\models$)

Alcune formule valide

1. $A \rightarrow A$ (identità)
2. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (affermazione del conseguente)
3. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (negazione dell'antecedente)
4. $\perp \rightarrow B$ (*ex falso quodlibet*)
5. $A \vee \neg A$ (terzo escluso)
6. $\neg(A \wedge \neg A)$ (non contraddizione)
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ (riduzione all'assurdo)
8. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (legge di Pierce)

Insoddisfacibilità e conseguenza logica

- F è una **contraddizione** (o è **insoddisfacibile**) se e solo se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di F, $\mathcal{M} \not\models F$; cioè se non esistono modelli di F.

  Un insieme di formule S è insoddisfacibile se non esistono modelli di S.

  Notare che una formula A è logicamente valida se e solo se $\neg A$ è insoddisfacibile.

Insoddisfacibilità e conseguenza logica

- F è una **contraddizione** (o è **insoddisfacibile**) se e solo se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di F, $\mathcal{M} \not\models F$; cioè se non esistono modelli di F.

  Un insieme di formule S è insoddisfacibile se non esistono modelli di S.

  Notare che una formula A è logicamente valida se e solo se $\neg A$ è insoddisfacibile.

- Una formula A è una **conseguenza logica** di un insieme di formule S – o S implica logicamente A

  $$S \models A$$

  sse ogni modello di S è un modello di A:
  per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ del linguaggio, se $\mathcal{M} \models S$ allora $\mathcal{M} \models A$.

Relazione tra conseguenza logica e insoddisfacibilità

$S \models A$ sse $S \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile

(vale per ogni logica)

Dimostrazione

- Ipotesi: $S \models A$, cioè per ogni $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \models S$, allora $\mathcal{M} \models A$.

  Se esistesse $\mathcal{M}^*$ tale che $\mathcal{M}^* \models S \cup \{\neg A\}$, si avrebbe:

  - $\mathcal{M}^* \models S \cup \{\neg A\} \implies \mathcal{M}^* \models S \implies \mathcal{M}^* \models \mathbf{A}$
  - $\mathcal{M}^* \models S \cup \{\neg A\} \implies \mathcal{M}^* \models \neg A \implies \mathcal{M}^* \not\models \mathbf{A}$

  Assurdo, quindi non esiste un modello di $S \cup \{\neg A\}$.

Relazione tra conseguenza logica e insoddisfacibilità

$S \models A$ **sse** $S \cup \{\neg A\}$ **è insoddisfacibile**

(vale per ogni logica)

Dimostrazione

- Ipotesi: $S \models A$, cioè per ogni $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \models S$, allora $\mathcal{M} \models A$.

  Se esistesse $\mathcal{M}^*$ tale che $\mathcal{M}^* \models S \cup \{\neg A\}$, si avrebbe:

  - $\mathcal{M}^* \models S \cup \{\neg A\} \implies \mathcal{M}^* \models S \implies \mathcal{M}^* \models \mathbf{A}$
  - $\mathcal{M}^* \models S \cup \{\neg A\} \implies \mathcal{M}^* \models \neg A \implies \mathcal{M}^* \not\models \mathbf{A}$

  Assurdo, quindi non esiste un modello di $S \cup \{\neg A\}$.

- Ipotesi: $S \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile.

  Sia $\mathcal{M}$ un **qualsiasi** modello di S. Dato che $\mathcal{M} \not\models S \cup \{\neg A\}$ e $\mathcal{M} \models S$, necessariamente $\mathcal{M} \not\models \neg A$.

  Dunque **ogni** modello di S è un modello di A: $\mathcal{M} \models A$.

Diversi usi del simbolo $\models$

Il suo significato dipende dal contesto (cosa c'è alla sua sinistra?):

- un'interpretazione ($\mathcal{M} \models X$ – dove X può indicare una formula o un insieme di formule): "$\mathcal{M}$ è un modello di X";
- nulla ($\models A$): "A è logicamente valida";
- un insieme di formule ($S \models A$): "A è una conseguenza logica di S" o "S implica logicamente A".

  N.B. Le parentesi graffe per indicare l'insieme di formule vengono generalmente omesse.

Ragionamenti corretti

Un ragionamento che dalle ipotesi S conclude A è corretto sse $S \models A$.

Per **verificare se $A_1, ..., A_n \models B$** si può:

- Dall'ipotesi che $\mathcal{M} \models \{A_1, ..., A_n\}$, per $\mathcal{M}$ **qualsiasi**, dimostrare che $\mathcal{M} \models B$.

- Cercare un modello di $\{A_1, ..., A_n, \neg B\}$: se la ricerca (sistematica) fallisce, allora $A_1, ..., A_n \models B$.

- *Dimostrare* B a partire da $A_1, ..., A_n$, utilizzando un **sistema di inferenza** per la logica considerata.

  Tra i sistemi di inferenza utilizzabili: metodi di **dimostrazione automatica**.

Per **dimostrare che $A_1, ..., A_n \not\models B$** c'è un unico metodo: trovare un'interpretazione $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models \{A_1, ..., A_n\}$ e $\mathcal{M} \not\models B$.

Equivalenza logica

A e B sono **logicamente equivalenti**

$$A \leftrightarrow B$$

sse:
per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di A e B:

$$\mathcal{M} \models A \text{ sse } \mathcal{M} \models B$$

Ciò equivale a dire che

$$\models A \equiv B$$

e anche che

$$A \models B \text{ e } B \models A$$

Non confondere:

- $\equiv$, che è un simbolo dell'alfabeto (un connettivo), con
- $\leftrightarrow$, che è un "meta-simbolo", cioè una notazione che utilizziamo per abbreviare "è logicamente equivalente a" – esattamente come $\models$.

Alcune equivalenze logiche importanti

- $A \wedge \neg A \;\leftrightarrow\; \bot$
- Commutatività e associatività di $\wedge$ e $\vee$:

$$
\begin{aligned}
A \wedge B &\;\leftrightarrow\; B \wedge A, \\
A \vee B &\;\leftrightarrow\; B \vee A, \\
A \wedge (B \wedge C) &\;\leftrightarrow\; (A \wedge B) \wedge C, \\
A \vee (B \vee C) &\;\leftrightarrow\; (A \vee B) \vee C
\end{aligned}
$$

- Leggi distributive:

$$
\begin{aligned}
(A \vee (B \wedge C)) &\;\leftrightarrow\; ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \\
(A \wedge (B \vee C)) &\;\leftrightarrow\; ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))
\end{aligned}
$$

- Leggi di De Morgan:

$$
\begin{aligned}
\neg(A \vee B) &\;\leftrightarrow\; (\neg A \wedge \neg B) \\
\neg(A \wedge B) &\;\leftrightarrow\; (\neg A \vee \neg B)
\end{aligned}
$$

- Doppia negazione: $A \;\leftrightarrow\; \neg\neg A$

Alcune equivalenze logiche importanti

- Leggi di assorbimento:

$$\begin{aligned} A \vee (A \wedge B) &\leftrightarrow A \\ A \wedge (A \vee B) &\leftrightarrow A \end{aligned}$$

- Definibilità di $\equiv$:

$$A \equiv B \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

- Interdefinibilità dei connettivi logici $\rightarrow, \wedge, \vee$:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \\ \neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \leftrightarrow A \wedge \neg B \\ A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \\ A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg A \rightarrow B \end{array}$$

- Contrapposizione:

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Esercizio: dimostrare le equivalenze logiche precedenti

Forme Normali Congiuntive (FNC) e Disgiuntive (FND)

LETTERALE: atomo (p) o negazione di un atomo ($\neg p$)

Una formula è in **FNC** sse ha la forma

$$D_1 \wedge \ldots \wedge D_k$$

dove ogni D_i è una disgiunzione di letterali ($k \geq 1$)

Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in FNC

$$(\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg s \vee p)$$

$$\neg p \wedge q \wedge (q \vee \neg s \vee p)$$

$$\neg p \wedge q$$

$$\neg p \vee q$$

$$\neg p$$

Forme Normali Congiuntive (FNC) e Disgiuntive (FND)

LETTERALE: atomo (p) o negazione di un atomo ($\neg p$)

Una formula è in **FNC** sse ha la forma

$$D_1 \wedge \ldots \wedge D_k$$

dove ogni D_i è una disgiunzione di letterali ($k \geq 1$)

Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in FNC

$$(\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg s \vee p)$$

$$\neg p \wedge q \wedge (q \vee \neg s \vee p)$$

$$\neg p \wedge q$$

$$\neg p \vee q$$

$$\neg p$$

Una formula è in **FND** sse ha la forma

$$C_1 \vee \ldots \vee C_k$$

dove ogni C_i è una congiunzione di letterali ($k \geq 1$)

Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in FND

$$(\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg s \wedge p)$$

$$\neg p \vee q \vee (q \wedge \neg s \wedge p)$$

$$\neg p \wedge q$$

$$\neg p \vee q$$

$$\neg p$$

Trasformazione in FNC e FND

1. Eliminare le implicazioni e le doppie implicazioni

$$\begin{array}{rcl} A \rightarrow B & \leftrightarrow & \neg A \vee B \\ \neg(A \rightarrow B) & \leftrightarrow & A \wedge \neg B \\ A \equiv B & \leftrightarrow & (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \\ \neg(A \equiv B) & \leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \end{array}$$

2. Portare le negazioni sugli atomi

$$\begin{array}{rcl} \neg(A \vee B) & \leftrightarrow & \neg A \wedge \neg B \\ \neg(A \wedge B) & \leftrightarrow & \neg A \vee \neg B \\ \neg\neg A & \leftrightarrow & A \end{array}$$

3. FNC: Distribuire $\vee$ su $\wedge$

$$\begin{array}{rcl} (A \wedge B) \vee C & \leftrightarrow & (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\ C \vee (A \wedge B) & \leftrightarrow & (C \vee A) \wedge (C \vee B) \end{array}$$

4. FND: Distribuire $\wedge$ su $\vee$

$$\begin{array}{rcl} (A \vee B) \wedge C & \leftrightarrow & (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \\ C \wedge (A \vee B) & \leftrightarrow & (C \wedge A) \vee (C \wedge B) \end{array}$$

Esempio

Trasformazione in FNC di

$$\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$

1. Eliminare le implicazioni e le doppie implicazioni

$$\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$

Esempio

Trasformazione in FNC di

$$\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$

1. Eliminare le implicazioni e le doppie implicazioni

$$\boxed{\neg}(\neg(p \vee \neg q)\boxed{\rightarrow}\neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$
$$\Longrightarrow \quad \neg(p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p)))$$

2. Portare le negazioni sugli atomi

$$\neg(p \vee \neg q) \wedge \boxed{\neg}\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p)))$$

Esempio

Trasformazione in FNC di

$$\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$

1. Eliminare le implicazioni e le doppie implicazioni

$$\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$
$$\Longrightarrow \quad \neg(p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p)))$$

2. Portare le negazioni sugli atomi

$$\neg(p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p)))$$
$$\Longrightarrow \quad \neg(p \vee \neg q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p)))$$

Esempio

Trasformazione in FNC di

$$\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$

1. Eliminare le implicazioni e le doppie implicazioni

$$\begin{aligned} &\boxed{\neg}(\neg(p \vee \neg q) \boxed{\rightarrow} \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p)))) \\ &\quad \Longrightarrow \quad \neg(p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \end{aligned}$$

2. Portare le negazioni sugli atomi

$$\begin{aligned} &\neg(p \vee \neg q) \wedge \boxed{\neg}\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\ &\quad \Longrightarrow \quad \boxed{\neg}(p \vee \neg q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\ &\quad \Longrightarrow \quad (\neg p \wedge \boxed{\neg}\neg q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \end{aligned}$$

Esempio

Trasformazione in FNC di

$$\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$

1. Eliminare le implicazioni e le doppie implicazioni

$$\begin{aligned} & \boxed{\neg}(\neg(p \vee \neg q) \boxed{\rightarrow} \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p)))) \\ \Longrightarrow \quad & \neg(p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \end{aligned}$$

2. Portare le negazioni sugli atomi

$$\begin{aligned} & \neg(p \vee \neg q) \wedge \boxed{\neg}\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\ \Longrightarrow \quad & \boxed{\neg}(p \vee \neg q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\ \Longrightarrow \quad & (\neg p \wedge \boxed{\neg}\neg q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\ \Longrightarrow \quad & (\neg p \wedge q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \end{aligned}$$

3. FNC: Distribuire $\vee$ su $\wedge$

$$(\neg p \wedge q) \wedge (q \boxed{\vee} (r \wedge (\neg s \vee p)))$$

Esempio

Trasformazione in FNC di

$$\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$

1. Eliminare le implicazioni e le doppie implicazioni

$$\begin{aligned} &\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p)))) \\ \Longrightarrow \quad &\neg(p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \end{aligned}$$

2. Portare le negazioni sugli atomi

$$\begin{aligned} &\neg(p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\ \Longrightarrow \quad &\neg(p \vee \neg q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\ \Longrightarrow \quad &(\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\ \Longrightarrow \quad &(\neg p \wedge q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \end{aligned}$$

3. FNC: Distribuire $\vee$ su $\wedge$

$$\begin{aligned} &(\neg p \wedge q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\ \Longrightarrow \quad &(\neg p \wedge q) \wedge ((q \vee r) \wedge (q \vee (\neg s \vee p))) \\ = \quad &\neg p \wedge q \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg s \vee p) \end{aligned}$$