Tipologie di esercizi

1. Data interpretazione $\mathcal{M}$ e formula F:
   - **dimostrare che** $\mathcal{M} \models F$
   - **dimostrare che** $\mathcal{M} \not\models F$
   - **verificare se** $\mathcal{M} \models F$
2. Data una formula F, **definire** interpretazione $\mathcal{M}$ tale che
   - $\mathcal{M} \models F$
   - $\mathcal{M} \not\models F$
3. Dato insieme S di formule e formula F:
   - **dimostrare che** $S \not\models F$
   - **dimostrare che** $S \models F$
   - **verificare se** $S \models F$

Prima tipologia

Data interpretazione $\mathcal{M}$ e formula F:

- **dimostrare che** $\mathcal{M} \models F$
- **dimostrare che** $\mathcal{M} \not\models F$

Prima tipologia

Data interpretazione $\mathcal{M}$ e formula F:

- **dimostrare che** $\mathcal{M} \models F$
- **dimostrare che** $\mathcal{M} \not\models F$

Step 1 Cosa significa che $\mathcal{M} \models F$ [o $\mathcal{M} \not\models F$]?

Prima tipologia

Data interpretazione $\mathcal{M}$ e formula F:

- **dimostrare che $\mathcal{M} \models F$**
- **dimostrare che $\mathcal{M} \not\models F$**

Step 1 Cosa significa che $\mathcal{M} \models F$ [o $\mathcal{M} \not\models F$]?

$\mathcal{M} \models F$ sse per ogni
assegnazione s:
$(\mathcal{M}, s) \models F$

Prima tipologia

Data interpretazione $\mathcal{M}$ e formula F:

- **dimostrare che $\mathcal{M} \models F$**
- **dimostrare che $\mathcal{M} \not\models F$**

Step 1 Cosa significa che $\mathcal{M} \models F$ [o $\mathcal{M} \not\models F$]?

$\mathcal{M} \models F$ sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models F$

$\mathcal{M} \not\models F$ sse esiste un'assegnazione s tale che $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

Prima tipologia

Data interpretazione $\mathcal{M}$ e formula F:

- **dimostrare che $\mathcal{M} \models F$**
- **dimostrare che $\mathcal{M} \not\models F$**

Step 1 Cosa significa che $\mathcal{M} \models F$ [o $\mathcal{M} \not\models F$]?

$\mathcal{M} \models F$ sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models F$

$\mathcal{M} \not\models F$ sse esiste un'assegnazione s tale che $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

Step 2 Applicare la definizione ricorsiva di $(\mathcal{M}, s) \models F$ e verificare che alla fine si abbiano condizioni vere (è anche possibile concludere prima, sfruttando le caratteristiche di $\mathcal{M}$)

Prima tipologia

Data interpretazione $\mathcal{M}$ e formula F:

- **dimostrare che $\mathcal{M} \models F$**
- **dimostrare che $\mathcal{M} \not\models F$**

Step 1 Cosa significa che $\mathcal{M} \models F$ [o $\mathcal{M} \not\models F$]?

$\mathcal{M} \models F$ sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models F$

$\mathcal{M} \not\models F$ sse esiste un'assegnazione s tale che $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

Step 2 Applicare la definizione ricorsiva di $(\mathcal{M}, s) \models F$ e verificare che alla fine si abbiano condizioni vere (è anche possibile concludere prima, sfruttando le caratteristiche di $\mathcal{M}$)

- **verificare se $\mathcal{M} \models F$**

Prima tipologia

Data interpretazione $\mathcal{M}$ e formula F:

- **dimostrare che $\mathcal{M} \models F$**
- **dimostrare che $\mathcal{M} \not\models F$**

Step 1 Cosa significa che $\mathcal{M} \models F$ [o $\mathcal{M} \not\models F$]?

$\mathcal{M} \models F$ sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models F$

$\mathcal{M} \not\models F$ sse esiste un'assegnazione s tale che $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

Step 2 Applicare la definizione ricorsiva di $(\mathcal{M}, s) \models F$ e verificare che alla fine si abbiano condizioni vere (è anche possibile concludere prima, sfruttando le caratteristiche di $\mathcal{M}$)

- **verificare se $\mathcal{M} \models F$**

Step 1 Applicare la definizione di $\models$
$\mathcal{M} \models F$ sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models F$

Step 2 Applicare la definizione ricorsiva di $(\mathcal{M}, s) \models F$ e verificare cosa succede alla fine (è anche possibile concludere prima, sfruttando le caratteristiche di $\mathcal{M}$)

Seconda tipologia

Data una formula F, **definire** interpretazione $\mathcal{M}$ tale che:

$$\mathcal{M} \models F \qquad \text{oppure} \qquad \mathcal{M} \not\models F$$

Seconda tipologia

Data una formula F, **definire** interpretazione $\mathcal{M}$ tale che:

$$\mathcal{M} \models F \qquad \text{oppure} \qquad \mathcal{M} \not\models F$$

Si devono determinare le condizioni che deve soddisfare $\mathcal{M}$ perché sia [o non sia] un modello di F:

Seconda tipologia

Data una formula F, **definire** interpretazione $\mathcal{M}$ tale che:

$$\mathcal{M} \models F \qquad \text{oppure} \qquad \mathcal{M} \not\models F$$

Si devono determinare le condizioni che deve soddisfare $\mathcal{M}$ perché sia [o non sia] un modello di F:

Step 1 Applicare la definizione di $\models$

$\mathcal{M} \models F$ sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models F$

$\mathcal{M} \not\models F$ sse esiste un'assegnazione s tale che $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

Seconda tipologia

Data una formula F, **definire** interpretazione $\mathcal{M}$ tale che:

$$\mathcal{M} \models F \qquad \text{oppure} \qquad \mathcal{M} \not\models F$$

Si devono determinare le condizioni che deve soddisfare $\mathcal{M}$ perché sia [o non sia] un modello di F:

Step 1 Applicare la definizione di $\models$

$\mathcal{M} \models F$ sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models F$	$\mathcal{M} \not\models F$ sse esiste un'assegnazione s tale che $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

Step 2 Applicare la definizione ricorsiva di $(\mathcal{M}, s) \models F$ e **costruire** alla fine un'interpretazione $\mathcal{M}$ che soddisfi le condizioni determinate

Terza tipologia (I)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che $S \not\models F$**

Terza tipologia (I)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che** $S \not\models F$

Step 1 Cosa significa che $S \not\models F$?

$S \models F$ sse

Terza tipologia (I)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che** $S \not\models F$

Step 1 Cosa significa che $S \not\models F$?

$S \models F$ sse per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ ed assegnazione s:
se $(\mathcal{M}, s) \models G$ per ogni formula $G \in S$, allora $(\mathcal{M}, s) \models F$

Quindi $S \not\models F$ sse

Terza tipologia (I)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che** $S \not\models F$

Step 1 Cosa significa che $S \not\models F$?

$S \models F$ sse per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ ed assegnazione s:
se $(\mathcal{M}, s) \models G$ per ogni formula $G \in S$, allora $(\mathcal{M}, s) \models F$

Quindi $S \not\models F$ sse esistono un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s tali che $(\mathcal{M}, s) \models G$ per ogni formula $G \in S$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

Terza tipologia (I)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che** $S \not\models F$

Step 1 Cosa significa che $S \not\models F$?

$S \models F$ sse per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ ed assegnazione s:
se $(\mathcal{M}, s) \models G$ per ogni formula $G \in S$, allora $(\mathcal{M}, s) \models F$

Quindi $S \not\models F$ sse esistono un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s tali che $(\mathcal{M}, s) \models G$ per ogni formula $G \in S$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

Step 2 Applicare la definizione ricorsiva di $(\mathcal{M}, s) \models X$ per trovare le condizioni che garantiscano (se $S = \{G_1, \ldots, G_n\}$):

$$(\mathcal{M}, s) \models G_1 \quad \ldots \quad (\mathcal{M}, s) \models G_n$$
e $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

e **costruire** alla fine un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s che soddisfino le condizioni determinate

Terza tipologia (II)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che $S \models F$**

Terza tipologia (II)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che $S \models F$**

Step 1 Cosa significa che $S \models F$?

$S \models F$ sse

Terza tipologia (II)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che** $S \models F$

Step 1 Cosa significa che $S \models F$?

$S \models F$ sse per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ ed assegnazione s:
se $(\mathcal{M}, s) \models G$ per ogni formula $G \in S$, allora $(\mathcal{M}, s) \models F$

Terza tipologia (II)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che $S \models F$**

Step 1 Cosa significa che $S \models F$?

$S \models F$ sse per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ ed assegnazione s:
se $(\mathcal{M}, s) \models G$ per ogni formula $G \in S$, allora $(\mathcal{M}, s) \models F$

Step 2 Applicare la definizione ricorsiva di $(\mathcal{M}, s) \models X$ per trovare le condizioni che garantiscano (se $S = \{G_1, \ldots, G_n\}$):

$$(\mathcal{M}, s) \models G_1 \quad \ldots \quad (\mathcal{M}, s) \models G_n$$

Terza tipologia (II)

Dato insieme S di formule e formula F: **dimostrare che** $S \models F$

Step 1 Cosa significa che $S \models F$?

$S \models F$ sse per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ ed assegnazione s:
se $(\mathcal{M}, s) \models G$ per ogni formula $G \in S$, allora $(\mathcal{M}, s) \models F$

Step 2 Applicare la definizione ricorsiva di $(\mathcal{M}, s) \models X$ per trovare le condizioni che garantiscano (se $S = \{G_1, \ldots, G_n\}$):

$$(\mathcal{M}, s) \models G_1 \quad \ldots \quad (\mathcal{M}, s) \models G_n$$

Step 3 Alternativa:

Ragionamento diretto. Determinare le condizioni che garantiscono $(\mathcal{M}, s) \models F$ e dimostrare che queste seguono dalle condizioni determinate allo step 2.

Ragionamento per assurdo. Determinare le condizioni che garantiscono $(\mathcal{M}, s) \not\models F$ e dimostrare che da queste, assieme alle condizioni determinate allo step 2, segue una contraddizione.

Terza tipologia (III)

Dato insieme S di formule e formula F, **verificare se $S \models F$**

$S \models F$ sse per ogni $\mathcal{M}$ ed s:
se $(\mathcal{M}, s) \models G$, per ogni $G \in S$, allora $(\mathcal{M}, s) \models F$.

Inizialmente si procede come nel caso precedente (alternativa 2):

1. Trovare le condizioni che garantiscono (se $S = \{G_1, \ldots, G_n\}$):

   $(\mathcal{M}, s) \models G_1 \quad \ldots \quad (\mathcal{M}, s) \models G_n$
   e $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

2. I casi sono due:
   - Le condizioni determinate sono contraddittorie:
     allora si conclude che

Terza tipologia (III)

Dato insieme S di formule e formula F, **verificare se** $S \models F$

$S \models F$ sse per ogni $\mathcal{M}$ ed s:
se $(\mathcal{M}, s) \models G$, per ogni $G \in S$, allora $(\mathcal{M}, s) \models F$.

Inizialmente si procede come nel caso precedente (alternativa 2):

1. Trovare le condizioni che garantiscono (se $S = \{G_1, \ldots, G_n\}$):

   $(\mathcal{M}, s) \models G_1 \quad \ldots \quad (\mathcal{M}, s) \models G_n$
   e $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

2. I casi sono due:
   - Le condizioni determinate sono contraddittorie:
     allora si conclude che $S \models F$
   - Le condizioni determinate non sono contraddittorie, allora è possibile **costruire** $\mathcal{M}$ e s tali che $(\mathcal{M}, s) \models S$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models F$,
     quindi si conclude che

Terza tipologia (III)

Dato insieme S di formule e formula F, **verificare se $S \models F$**

$S \models F$ sse per ogni $\mathcal{M}$ ed s:
se $(\mathcal{M}, s) \models G$, per ogni $G \in S$, allora $(\mathcal{M}, s) \models F$.

Inizialmente si procede come nel caso precedente (alternativa 2):

1. Trovare le condizioni che garantiscono (se $S = \{G_1, \ldots, G_n\}$):

   $(\mathcal{M}, s) \models G_1 \quad \ldots \quad (\mathcal{M}, s) \models G_n$
   e $(\mathcal{M}, s) \not\models F$

2. I casi sono due:
   - Le condizioni determinate sono contraddittorie:
     allora si conclude che $S \models F$
   - Le condizioni determinate non sono contraddittorie, allora è possibile **costruire** $\mathcal{M}$ e s tali che $(\mathcal{M}, s) \models S$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models F$,
     quindi si conclude che $S \not\models F$