

Sistemi di dimostrazione

Un sistema di deduzione (o dimostrazione) consiste di

- un insieme di assiomi (a volte vuoto)
- un insieme di **regole di inferenza**

Una **deduzione** (o derivazione) di una formula A da un insieme S di formule è un albero T (rappresentato con la radice in basso) dove

- la radice di T è A
- ogni foglia di T è un assioma o una formula di S
- ogni nodo che non sia una foglia è derivabile dai suoi genitori mediante una regola di inferenza

Notazione: $S \vdash A$ (o $S \vdash_X A$)
= A è derivabile da S (utilizzando il sistema di inferenza X)

Esempio: il sistema hilbertiano H per la logica proposizionale

Linguaggio proposizionale con \rightarrow e \neg .

- Assiomi:

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$

- Regola di inferenza: $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ (MPP)

Esempio di derivazione:

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash_H P \rightarrow R$$

$$\frac{P \rightarrow Q \quad \frac{[A2](P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)) \quad \frac{Q \rightarrow R \quad [A1](Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}}{(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)}}{P \rightarrow R}$$

Metodi di dimostrazione automatica: risolvono problemi della forma seguente:

Dato un insieme S di formule e una formula A , determinare se $S \models A$

La maggior parte dei metodi di deduzione automatica sono **metodi di refutazione**: anziché dimostrare direttamente che $S \models A$, si dimostra che $S \cup \{\neg A\}$ è un insieme insoddisfacibile (cioè che $S, \neg A \models \perp$).

Si basano sul seguente

Teorema: $S \models A$ sse $S \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile.

(già dimostrato)

Metodo di risoluzione: sistema di inferenza senza assiomi e con un'unica regola di inferenza.

Il metodo di risoluzione per la logica proposizionale

- Sistema di inferenza con una sola regola: la regola di risoluzione
- La regola di risoluzione si applica a **clausole** (disgiunzioni di **letterali**)

$$L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k$$

dove $L_i = p_i$ oppure $L_i = \neg p$

Un **letterale** è un atomo o la negazione di un atomo

Una **clausola** è una disgiunzione di letterali

- Una clausola si può rappresentare mediante l'insieme dei suoi letterali

$$L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k \implies \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$$

Regola di risoluzione proposizionale

$$\frac{C_1 \cup \{p\}; \quad C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

$C_1 \cup C_2$ è il **risolvente**

p e $\neg p$ sono **letterali complementari**

Esempio

$$\neg p \vee q, p \vee r, \neg q \vee s \vdash_{Res} r \vee s$$

$$\frac{\frac{\{\neg p, q\} \quad \{p, r\}}{\{q, r\}} \quad \{\neg q, s\}}{\{r, s\}}$$

Oppure:

$$\frac{\frac{\neg p \vee q \quad p \vee r}{q \vee r} \quad \neg q \vee s}{r \vee s}$$

$$\neg p \vee q, \neg q, p \vdash_{Res} \perp$$

$$\frac{\frac{\{\neg p, q\} \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}} \quad \{p\}}{\emptyset}$$

$$\frac{\frac{\neg p \vee q \quad \neg q}{\neg p} \quad p}{\square}$$

□ è la **clausola vuota** (il falso)

Risoluzione proposizionale

Teorema. La regola di risoluzione proposizionale è **corretta**:
se C è un risolvente di C_1 e C_2 , allora $C_1, C_2 \models C$

Corollario. Il sistema di risoluzione proposizionale è corretto:

$$S \vdash_{Res} C \implies S \models C$$

Ma il sistema di risoluzione proposizionale non è completo rispetto alla derivabilità:

$$\not\vdash_{Res} p \vee \neg p$$

Completezza implicazionale: se $S \models C$ e C non è valida, allora esiste una clausola $C' \subseteq C$ (C' **sussume** C) tale che $S \vdash_{Res} C'$.

Il sistema di risoluzione come metodo di refutazione

$S \models A$ sse $S \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile

Per dimostrare $S \models A$ si **refuta** $S \cup \{\neg A\}$, cioè si dimostra che $S \cup \{\neg A\} \vdash \perp$

Per “dimostrare” per risoluzione $S \models A$:

- 1 trasformare ogni formula C in $S \cup \{\neg A\}$ in **forma a clausole**:

$$\begin{aligned} C &\implies (L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{k,1} \vee \dots \vee L_{k,n_k}) \\ &\implies \{L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}, \dots, L_{k,1} \vee \dots \vee L_{k,n_k}\} \\ &\implies \{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{k,1}, \dots, L_{k,n_k}\}\} \end{aligned}$$

- 2 Se S^* è l'insieme di clausole ottenute, dimostrare che:

$$S^* \vdash_{Res} \square$$

$$p \wedge q \rightarrow r, p \rightarrow q \models p \rightarrow r$$

1 Trasformazione in forma a clausole

$$\begin{aligned} a) \quad p \wedge q \rightarrow r &\implies \neg(p \wedge q) \vee r \\ &\implies \neg p \vee \neg q \vee r \\ &\implies \{\neg p \vee \neg q \vee r\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad p \rightarrow q &\implies \neg p \vee q \\ &\implies \{\neg p \vee q\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \neg(p \rightarrow r) &\implies p \wedge \neg r \\ &\implies \{p, \neg r\} \end{aligned}$$

$$S = \{\neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee q, p, \neg r\}$$

2 Derivazione della clausola vuota:

$$\begin{array}{c} \frac{\neg p \vee \neg q \vee r \quad \neg r}{\neg p \vee \neg q} \quad \frac{\neg p \vee q \quad p}{q} \\ \hline \frac{\neg p}{\quad} \quad p \end{array}$$

□

Completezza refutazionale della risoluzione proposizionale

Se $S \models A$ allora $S \cup \{\neg A\} \vdash_{Res} \square$

cioè: se $S \models A$ allora esiste una derivazione per risoluzione di \square dalla forma a clausole di $S \cup \{\neg A\}$.

Quindi: se S è un insieme di clausole:

S è insoddisfacibile sse $S \vdash_{Res} \square$

Il metodo di risoluzione per la logica del primo ordine

Forme normali prenesse

$$\underbrace{Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n}_{\text{prefisso}} \underbrace{A}_{\text{matrice}}$$

la matrice è senza quantificatori.

Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in forma normale prenessa.

Forme normali di Skolem

$$\forall x_1 \dots \forall x_n A \quad A \text{ senza quantificatori}$$

Trasformazione di una formula in forma di Skolem (“**skolemizzazione**”):

- 1 Trasformazione in forma prenessa: $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n A$
- 2 Eliminazione dei quantificatori esistenziali:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y A \implies \forall x_1 \dots \forall x_n A[f(x_1, \dots, x_n)/y]$$

dove $\forall x_1, \dots, \forall x_n$ sono tutti i quantificatori universali che precedono $\exists y$ e f è un simbolo funzionale **nuovo** (**funzione di skolem**)

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v p(x, y, z, u, w, v)$$

Esempio

$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v p(x, y, z, u, w, v)$

$\Rightarrow \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v p(c, y, z, u, w, v)$

Esempio

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v p(x, y, z, u, w, v)$$

$$\Rightarrow \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v p(c, y, z, u, w, v)$$

$$\Rightarrow \forall y \forall z \forall w \exists v p(c, y, z, f(y, z), w, v)$$

$$\exists \mathbf{x} \forall y \forall z \exists u \forall w \exists v p(\mathbf{x}, y, z, u, w, v)$$

$$\Rightarrow \forall y \forall z \exists \mathbf{u} \forall w \exists v p(\mathbf{c}, y, z, \mathbf{u}, w, v)$$

$$\Rightarrow \forall y \forall z \forall w \exists \mathbf{v} p(c, y, z, \mathbf{f}(y, z), w, \mathbf{v})$$

$$\Rightarrow \forall y \forall z \forall w p(c, y, z, f(y, z), w, \mathbf{g}(y, z, w))$$

dove c, f, g sono simboli *nuovi*

$$\forall x \exists y p(x, y) \implies \forall x p(x, f(x))$$

y “dipende” da x

$$\exists y \forall x p(x, y) \implies \forall x p(x, c)$$

y non dipende da x

Forma a clausole

- 1 Trasformare A in forma normale di Skolem
- 2 Eliminare i quantificatori universali
- 3 Trasformare la matrice in forma normale congiuntiva
- 4 Trasformare in insieme di clausole

Esempio

$$\forall x \exists y \exists z (\neg p(x, y) \vee \neg(r(x, y, z) \rightarrow q(x, z)))$$

Forma a clausole

- 1 Trasformare A in forma normale di Skolem
- 2 Eliminare i quantificatori universali
- 3 Trasformare la matrice in forma normale congiuntiva
- 4 Trasformare in insieme di clausole

Esempio

$$\forall x \exists y \exists z (\neg p(x, y) \vee \neg(r(x, y, z) \rightarrow q(x, z)))$$
$$\Rightarrow \neg p(x, f(x)) \vee \neg(r(x, f(x), g(x)) \rightarrow q(x, g(x)))$$

Forma a clausole

- 1 Trasformare A in forma normale di Skolem
- 2 Eliminare i quantificatori universali
- 3 Trasformare la matrice in forma normale congiuntiva
- 4 Trasformare in insieme di clausole

Esempio

$$\forall x \exists y \exists z (\neg p(x, y) \vee \neg(r(x, y, z) \rightarrow q(x, z)))$$

$$\Rightarrow \neg p(x, f(x)) \vee \neg(r(x, f(x), g(x)) \rightarrow q(x, g(x)))$$

$$\Rightarrow \neg p(x, f(x)) \vee (r(x, f(x), g(x)) \wedge \neg q(x, g(x)))$$

Forma a clausole

- 1 Trasformare A in forma normale di Skolem
- 2 Eliminare i quantificatori universali
- 3 Trasformare la matrice in forma normale congiuntiva
- 4 Trasformare in insieme di clausole

Esempio

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y \exists z (\neg p(x, y) \vee \neg(r(x, y, z) \rightarrow q(x, z))) \\ \Rightarrow & \neg p(x, f(x)) \vee \neg(r(x, f(x), g(x)) \rightarrow q(x, g(x))) \\ \Rightarrow & \neg p(x, f(x)) \vee (r(x, f(x), g(x)) \wedge \neg q(x, g(x))) \\ \Rightarrow & (\neg p(x, f(x)) \vee r(x, f(x), g(x))) \wedge (\neg p(x, f(x)) \vee \neg q(x, g(x))) \\ \Rightarrow & \{ \neg p(x, f(x)) \vee r(x, f(x), g(x)), \neg p(x, f(x)) \vee \neg q(x, g(x)) \} \end{aligned}$$

N.B: Le variabili libere si intendono quantificate universalmente; se A è una formula con le variabili libere x_1, \dots, x_n , A sta per la sua “chiusura universale”

$\forall x_1, \dots, \forall x_n A$

Denotiamo con $\forall A$ la chiusura universale di A

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)),$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) \end{aligned}$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) \end{aligned}$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)) &\Rightarrow b(c_0) \wedge e(c_0) &\Rightarrow \{b(c_0), e(c_0)\} \\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) &\Rightarrow \end{aligned}$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) \end{aligned}$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)) &\Rightarrow b(c_0) \wedge e(c_0) \Rightarrow \{b(c_0), e(c_0)\} \\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) &\Rightarrow \exists x \forall y (b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x, y))) \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) \end{aligned}$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \wedge e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0), e(c_0)\}$$

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) &\quad \Rightarrow \quad \exists x \forall y (b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x, y))) \\ \Rightarrow b(c_1) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)) &\quad \Rightarrow \quad \{b(c_1), \neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)\} \end{aligned}$$

$$\neg \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) \quad \Rightarrow$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) \end{aligned}$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)) &\Rightarrow b(c_0) \wedge e(c_0) &\Rightarrow \{b(c_0), e(c_0)\} \\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) &\Rightarrow \exists x \forall y (b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x, y))) \\ \Rightarrow b(c_1) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)) &\Rightarrow \{b(c_1), \neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)\} \\ \neg \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) &\Rightarrow \forall x \neg (b(x) \wedge \exists y \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x)))$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \wedge e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0), e(c_0)\}$$

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) &\quad \Rightarrow \quad \exists x \forall y (b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x, y))) \\ \Rightarrow b(c_1) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)) &\quad \Rightarrow \quad \{b(c_1), \neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg \exists x(b(x) \wedge \forall y \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) &\quad \Rightarrow \quad \forall x \neg (b(x) \wedge \exists y \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) \\ \Rightarrow \forall x \neg \exists y (b(x) \wedge \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) &\quad \Rightarrow \end{aligned}$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) \end{aligned}$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)) &\Rightarrow b(c_0) \wedge e(c_0) &\Rightarrow \{b(c_0), e(c_0)\} \\ \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) &\Rightarrow \exists x \forall y (b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x, y))) \\ &\Rightarrow b(c_1) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)) &\Rightarrow \{b(c_1), \neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)\} \\ \neg \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) &\Rightarrow \forall x \neg (b(x) \wedge \exists y \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) \\ &\Rightarrow \forall x \neg \exists y (b(x) \wedge \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) &\Rightarrow \forall x \forall y \neg (b(x) \wedge \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) \end{aligned}$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \wedge e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0), e(c_0)\}$$

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) &\quad \Rightarrow \quad \exists x \forall y (b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x, y))) \\ \Rightarrow b(c_1) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)) &\quad \Rightarrow \quad \{b(c_1), \neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) &\quad \Rightarrow \quad \forall x \neg (b(x) \wedge \exists y \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) \\ \Rightarrow \forall x \neg \exists y (b(x) \wedge \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) &\quad \Rightarrow \quad \forall x \forall y \neg (b(x) \wedge \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) \\ \Rightarrow \neg b(x) \vee (b(y) \rightarrow a(y, x)) &\quad \Rightarrow \end{aligned}$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6 delle Dispense

Alcuni botanici sono eccentrici. Alcuni botanici non amano cose eccentriche.
Quindi alcuni botanici non sono amati da tutti i botanici.

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) \end{aligned}$$

Trasformazione delle formule di S e della **negazione della conclusione** in forma clausale:

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)) \quad \Rightarrow \quad b(c_0) \wedge e(c_0) \quad \Rightarrow \quad \{b(c_0), e(c_0)\}$$

$$\begin{aligned} \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) &\quad \Rightarrow \quad \exists x \forall y (b(x) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(x, y))) \\ \Rightarrow b(c_1) \wedge (\neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)) &\quad \Rightarrow \quad \{b(c_1), \neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x))) &\quad \Rightarrow \quad \forall x \neg (b(x) \wedge \exists y \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) \\ \Rightarrow \forall x \neg \exists y (b(x) \wedge \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) &\quad \Rightarrow \quad \forall x \forall y \neg (b(x) \wedge \neg (b(y) \rightarrow a(y, x))) \\ \Rightarrow \neg b(x) \vee (b(y) \rightarrow a(y, x)) &\quad \Rightarrow \quad \neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y, x) \\ \Rightarrow \{\neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y, x)\} \end{aligned}$$

L'insieme di clausole che si ottiene è:

$$\{b(c_0), e(c_0), b(c_1), \neg e(y) \vee \neg a(c_1, y), \neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y, x)\}$$

Che relazione c'è tra A e la sua forma a clausole?

$A \implies$ forma prenessa

1 Se $pre(A)$ è una forma prenessa di A , allora $A \leftrightarrow pre(A)$

Che relazione c'è tra A e la sua forma a clausole?

$A \implies$ forma prenessa
 \implies forma di Skolem

1 Se $pre(A)$ è una forma prenessa di A , allora $A \leftrightarrow pre(A)$

2 ???

Che relazione c'è tra A e la sua forma a clausole?

- $A \implies$ forma prenessa
- \implies forma di Skolem
- \implies forma di Skolem con matrice in FNC

1 Se $pre(A)$ è una forma prenessa di A , allora $A \leftrightarrow pre(A)$

2 ???

3 Se $FNC(A)$ è una forma normale congiuntiva di A , allora
 $\forall x_1 \dots \forall x_n A \leftrightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n FNC(A)$

Che relazione c'è tra A e la sua forma a clausole?

- $A \implies$ forma prenessa
- \implies forma di Skolem
- \implies forma di Skolem con matrice in FNC
- \implies eliminazione dei \forall

1 Se $pre(A)$ è una forma prenessa di A , allora $A \leftrightarrow pre(A)$

2 ???

3 Se $FNC(A)$ è una forma normale congiuntiva di A , allora
 $\forall x_1 \dots \forall x_n A \leftrightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n FNC(A)$

4 Eliminazione dei quantificatori universali: A sta per $\forall x_1 \dots \forall x_n A$

Che relazione c'è tra A e la sua forma a clausole?

- $A \implies$ forma prenessa
- \implies forma di Skolem
- \implies forma di Skolem con matrice in FNC
- \implies eliminazione dei \forall
- \implies insieme di clausole

1 Se $pre(A)$ è una forma prenessa di A , allora $A \leftrightarrow pre(A)$

2 ???

3 Se $FNC(A)$ è una forma normale congiuntiva di A , allora
 $\forall x_1 \dots \forall x_n A \leftrightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n FNC(A)$

4 Eliminazione dei quantificatori universali: A sta per $\forall x_1 \dots \forall x_n A$

5 $\forall x_1 \dots \forall x_n (C_1 \wedge \dots \wedge C_k) \leftrightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n C_1 \wedge \dots \wedge \forall x_1 \dots \forall x_n C_k$

Un insieme di formule S sta per la congiunzione delle formule in S , quindi
 $\forall x_1 \dots \forall x_n (C_1 \wedge \dots \wedge C_k)$ equivale a $\{\forall x_1 \dots \forall x_n C_1, \dots, \forall x_1 \dots \forall x_n C_k\}$, cioè
 $\{C_1, \dots, C_k\}$

A e $sk(A)$ non sono equivalenti

Se $sk(A)$ è una forma di Skolem di A

$$\not\models A \equiv sk(A)$$

$$\boxed{\models sk(A) \rightarrow A}$$

Sia $A = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y A[x_1, \dots, x_n, y]$ e $sk(A) = \forall x_1 \dots \forall x_n A[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$$

\Rightarrow per ogni s e $d_1, \dots, d_n \in D$:

$$(\mathcal{M}, s[d_1/x_1, \dots, d_n/x_n]) \models A[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$$

\Rightarrow per ogni s e $d_1, \dots, d_n \in D$: $(\mathcal{M}, s[d_1/x_1, \dots, d_n/x_n]) \models \exists y A[x_1, \dots, x_n, y]$

$\Rightarrow \mathcal{M} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y A[x_1, \dots, x_n, y]$

A e $sk(A)$ non sono equivalenti

Se $sk(A)$ è una forma di Skolem di A

$$\not\models A \equiv sk(A)$$

$$\boxed{\models sk(A) \rightarrow A}$$

Sia $A = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y A[x_1, \dots, x_n, y]$ e $sk(A) = \forall x_1 \dots \forall x_n A[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$$

\Rightarrow per ogni s e $d_1, \dots, d_n \in D$:

$$(\mathcal{M}, s[d_1/x_1, \dots, d_n/x_n]) \models A[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)]$$

\Rightarrow per ogni s e $d_1, \dots, d_n \in D$: $(\mathcal{M}, s[d_1/x_1, \dots, d_n/x_n]) \models \exists y A[x_1, \dots, x_n, y]$

$\Rightarrow \mathcal{M} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y A[x_1, \dots, x_n, y]$

Ma $\boxed{\not\models A \rightarrow sk(A)}$

Sia $A = \exists x p(x)$, $sk(A) = p(c)$

Consideriamo \mathcal{M} con $D = \{1, 2\}$, $\mathcal{M}(c) = 1$, $\mathcal{M}(p) = \{2\}$

Chiaramente: $\mathcal{M} \models \exists x p(x)$, ma $\mathcal{M} \not\models p(c)$

Relazione tra A e $sk(A)$

Tuttavia A è soddisfacibile $\implies sk(A)$ è soddisfacibile

Quindi **la skolemizzazione conserva la soddisfacibilità**

$$A \text{ è soddisfacibile} \iff sk(A) \text{ è soddisfacibile}$$

(poichè $\models sk(A) \rightarrow A$: $sk(A)$ soddisfacibile $\implies A$ soddisfacibile)

Questo è quel che interessa per i metodi di prova per refutazione:

$$\begin{aligned} S \models A &\iff S \cup \{\neg A\} \text{ è insoddisfacibile} \\ &\iff \text{la forma a clausole di } S \cup \{\neg A\} \text{ è insoddisfacibile} \end{aligned}$$

Teorema

- A è insoddisfacibile sse la sua forma a clausole è insoddisfacibile
- se S è un insieme di formule e S' è ottenuto trasformando ogni formula in S in forma clausale, allora S è insoddisfacibile sse S' è insoddisfacibile.

Il metodo di risoluzione controlla l'insoddisfacibilità di insiemi di clausole

Regola di risoluzione

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \quad C_2 \cup \{\neg Q\}}{C_1\theta \cup C_2\theta} \quad \text{se } \theta = \text{mgu}(P, Q)$$

$C_1\theta \cup C_2\theta$ è un **risolvente binario** di $C_1 \cup \{P\}$ e $C_2 \cup \{\neg Q\}$.

Esempio:

$$\frac{p(x) \vee q(x) \quad \neg p(f(y)) \vee r(y)}{q(f(y)) \vee r(y)} \quad \theta = [f(y)/x]$$

La regola di risoluzione al primo ordine combina l'istanziamento di variabili (universali) con la regola di risoluzione proposizionale:

$$\frac{\frac{p(x) \vee q(x)}{p(f(y)) \vee q(f(y))} \quad \text{IST} \quad \neg p(f(y)) \vee r(y)}{q(f(y)) \vee r(y)}$$

Ridenominazione delle variabili

Si può assumere che le due **clausole “genitrici”** non abbiano variabili in comune: quando una clausola viene usata, si rinominano le sue variabili (***standardizing apart***), ottenendo una **variante** della clausola.

Rinominare le variabili in una clausola = rinominare variabili quantificate universalmente

Esempio: la regola di risoluzione si può applicare alle clausole $p(x) \vee q(x)$ e $\neg p(f(x)) \vee r(x)$: in una delle due clausole (o entrambe) la x viene ridenominata:

$$\frac{p(x_1) \vee q(x_1) \quad p(f(x_2)) \vee r(x_2)}{q(f(x_2)) \vee r(x_2)} \quad \theta = \{f(x_2)/x_1\}$$

Ridenominazione delle variabili

Si può assumere che le due **clausole “genitrici”** non abbiano variabili in comune: quando una clausola viene usata, si rinominano le sue variabili (**standardizing apart**), ottenendo una **variante** della clausola.

Rinominare le variabili in una clausola = rinominare variabili quantificate universalmente

Esempio: la regola di risoluzione si può applicare alle clausole $p(x) \vee q(x)$ e $\neg p(f(x)) \vee r(x)$: in una delle due clausole (o entrambe) la x viene ridenominata:

$$\frac{p(x_1) \vee q(x_1) \quad p(f(x_2)) \vee r(x_2)}{q(f(x_2)) \vee r(x_2)} \quad \theta = \{f(x_2)/x_1\}$$

Confronta:

$$\frac{p(c) \vee q(x) \quad \neg p(x) \vee r(x)}{q(c) \vee r(c)} \quad \theta = \{c/x\}$$

Ridenominazione delle variabili

Si può assumere che le due **clausole “genitrici”** non abbiano variabili in comune: quando una clausola viene usata, si rinominano le sue variabili (**standardizing apart**), ottenendo una **variante** della clausola.

Rinominare le variabili in una clausola = rinominare variabili quantificate universalmente

Esempio: la regola di risoluzione si può applicare alle clausole $p(x) \vee q(x)$ e $\neg p(f(x)) \vee r(x)$: in una delle due clausole (o entrambe) la x viene ridenominata:

$$\frac{p(x_1) \vee q(x_1) \quad p(f(x_2)) \vee r(x_2)}{q(f(x_2)) \vee r(x_2)} \quad \theta = \{f(x_2)/x_1\}$$

Confronta:

$$\frac{p(c) \vee q(x) \quad \neg p(x) \vee r(x)}{q(c) \vee r(c)} \quad \theta = \{c/x\}$$

$$\frac{p(c) \vee q(x_1) \quad \neg p(x) \vee r(x)}{q(x_1) \vee r(c)} \quad \theta = \{c/x\}$$

Esercizio O-16 del paragrafo 3.6: dimostrazione

$$\exists x(b(x) \wedge e(x)), \exists x(b(x) \wedge \forall y(e(y) \rightarrow \neg a(x, y))) \models \\ \exists x(b(x) \wedge \neg \forall y(b(y) \rightarrow a(y, x)))$$

se e solo se

$$b(c_0), e(c_0), b(c_1), \neg e(y) \vee \neg a(c_1, y), \neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y, x) \vdash_{Res} \square$$

$$\frac{e(c_0) \quad \frac{\neg e(y_2) \vee \neg a(c_1, y_2)}{\neg e(c_0)} \quad \frac{\frac{b(c_1) \quad \frac{b(c_0) \quad \neg b(x_1) \vee \neg b(y_1) \vee a(y_1, x_1)}{\neg b(y_1) \vee a(y_1, c_0)} \{c_0/x_1\}}{a(c_1, c_0)} \{c_1/y_1\}}{\neg e(c_0)} \{c_0/y_2\}}{\square}$$

□

Scrittura lineare

(senza ridenominazione delle variabili, che in questo caso non serve)

1. $b(c_0)$ *in S*
2. $e(c_0)$ *in S*
3. $b(c_1)$ *in S*
4. $\neg e(y) \vee \neg a(c_1, y)$ *in S*
5. $\neg b(x) \vee \neg b(y) \vee a(y, x)$ *in S*

6. $\neg b(y) \vee a(y, c_0)$ *Res(1, 5), $\{c_0/x\}$*
7. $a(c_1, c_0)$ *Res(3, 6), $\{c_1/y\}$*
8. $\neg e(c_0)$ *Res(4, 7), $\{c_0/y\}$*
9. \square *Res(2, 8)*

Esempio

- 1 Alcuni funzionari di dogana hanno perquisito tutti coloro che sono entrati nel paese, ad eccezione dei VIP.
- 2 Alcuni spacciatori di droga sono entrati nel paese e sono stati perquisiti solo da spacciatori di droga.
- 3 Nessuno spacciatore è un VIP.
- 4 Quindi alcuni funzionari sono spacciatori di droga.

Rappresentazione

\mathcal{L} :

$E(x)$	x è entrato nel paese
$V(x)$	x è un VIP
$P(x, y)$	y ha perquisito x
$F(x)$	x è un funzionario di dogana
$S(x)$	x è uno spacciatore di droga

- 1 $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x, y)))$
- 2 $\exists x(S(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(P(x, y) \rightarrow S(y)))$
- 3 $\forall x(S(x) \rightarrow \neg V(x))$
- 4 $\exists x(F(x) \wedge S(x))$

Trasformazione in clausole

$$1. \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x, y)))$$

\Rightarrow

Trasformazione in clausole

$$1. \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x, y)))$$

$$\Rightarrow \forall x \exists y (\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x, y)))$$

\Rightarrow

Trasformazione in clausole

$$\begin{aligned} 1. & \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x, y))) \\ \Rightarrow & \forall x \exists y (\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x, y))) \\ \Rightarrow & \forall x (\neg E(x) \vee V(x) \vee (F(f(x)) \wedge P(x, f(x)))) \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

Trasformazione in clausole

$$1. \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x, y)))$$

$$\Rightarrow \forall x \exists y (\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x, y)))$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg E(x) \vee V(x) \vee (F(f(x)) \wedge P(x, f(x))))$$

$$\Rightarrow (\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x))) \wedge (\neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x)))$$

$$\Rightarrow \{\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x)), \neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x))\}$$

$$2. \exists x(S(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(P(x, y) \rightarrow S(y)))$$

\Rightarrow

Trasformazione in clausole

$$1. \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x, y)))$$

$$\Rightarrow \forall x \exists y (\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x, y)))$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg E(x) \vee V(x) \vee (F(f(x)) \wedge P(x, f(x))))$$

$$\Rightarrow (\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x))) \wedge (\neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x)))$$

$$\Rightarrow \{\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x)), \neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x))\}$$

$$2. \exists x(S(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(P(x, y) \rightarrow S(y)))$$

$$\Rightarrow \exists x \forall y (S(x) \wedge E(x) \wedge (\neg P(x, y) \vee S(y)))$$

\Rightarrow

Trasformazione in clausole

$$\begin{aligned} 1. & \quad \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x, y))) \\ \Rightarrow & \quad \forall x \exists y (\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x, y))) \\ \Rightarrow & \quad \forall x (\neg E(x) \vee V(x) \vee (F(f(x)) \wedge P(x, f(x)))) \\ \Rightarrow & \quad (\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x))) \wedge (\neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x))) \\ \Rightarrow & \quad \{\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x)), \neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. & \quad \exists x(S(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(P(x, y) \rightarrow S(y))) \\ \Rightarrow & \quad \exists x \forall y (S(x) \wedge E(x) \wedge (\neg P(x, y) \vee S(y))) \\ \Rightarrow & \quad S(a) \wedge E(a) \wedge (\neg P(a, y) \vee S(y)) \\ \Rightarrow & \quad \{S(a), E(a), \neg P(a, y) \vee S(y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & \quad \forall x(S(x) \rightarrow \neg V(x)) \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

Trasformazione in clausole

$$\begin{aligned} 1. & \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x, y))) \\ \Rightarrow & \forall x \exists y (\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x, y))) \\ \Rightarrow & \forall x (\neg E(x) \vee V(x) \vee (F(f(x)) \wedge P(x, f(x)))) \\ \Rightarrow & (\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x))) \wedge (\neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x))) \\ \Rightarrow & \{\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x)), \neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. & \exists x(S(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(P(x, y) \rightarrow S(y))) \\ \Rightarrow & \exists x \forall y (S(x) \wedge E(x) \wedge (\neg P(x, y) \vee S(y))) \\ \Rightarrow & S(a) \wedge E(a) \wedge (\neg P(a, y) \vee S(y)) \\ \Rightarrow & \{S(a), E(a), \neg P(a, y) \vee S(y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & \forall x(S(x) \rightarrow \neg V(x)) \\ \Rightarrow & \forall x(\neg S(x) \vee \neg V(x)) \\ \Rightarrow & \{\neg S(x) \vee \neg V(x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(4). & \neg \exists x(F(x) \wedge S(x)) \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

Trasformazione in clausole

$$\begin{aligned} 1. & \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge P(x, y))) \\ \Rightarrow & \forall x \exists y (\neg(E(x) \wedge \neg V(x)) \vee (F(y) \wedge P(x, y))) \\ \Rightarrow & \forall x (\neg E(x) \vee V(x) \vee (F(f(x)) \wedge P(x, f(x)))) \\ \Rightarrow & (\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x))) \wedge (\neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x))) \\ \Rightarrow & \{\neg E(x) \vee V(x) \vee F(f(x)), \neg E(x) \vee V(x) \vee P(x, f(x))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. & \exists x(S(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(P(x, y) \rightarrow S(y))) \\ \Rightarrow & \exists x \forall y (S(x) \wedge E(x) \wedge (\neg P(x, y) \vee S(y))) \\ \Rightarrow & S(a) \wedge E(a) \wedge (\neg P(a, y) \vee S(y)) \\ \Rightarrow & \{S(a), E(a), \neg P(a, y) \vee S(y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & \forall x(S(x) \rightarrow \neg V(x)) \\ \Rightarrow & \forall x(\neg S(x) \vee \neg V(x)) \\ \Rightarrow & \{\neg S(x) \vee \neg V(x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(4). & \neg \exists x(F(x) \wedge S(x)) \\ \Rightarrow & \forall x \neg(F(x) \wedge S(x)) \\ \Rightarrow & \{\neg F(x) \vee \neg S(x)\} \end{aligned}$$

Dimostrazione per risoluzione da S :

1. $\neg E(x_1) \vee V(x) \vee F(f(x_1))$ *in S*
2. $\neg E(x_2) \vee V(x) \vee P(x_2, f(x_2))$ *in S*
3. $S(a)$ *in S*
4. $E(a)$ *in S*
5. $\neg P(a, y_1) \vee S(y_1)$ *in S*
6. $\neg S(x_3) \vee \neg V(x_3)$ *in S*
7. $\neg F(x_4) \vee \neg S(x_4)$ *in S*

8. $V(a) \vee P(a, f(a))$ *Res(2, 4), {a/x₂}*
9. $\neg V(a)$ *Res(3, 6), {a/x₃}*
10. $P(a, f(a))$ *Res(8, 9)*
11. $S(f(a))$ *Res(5, 10), {f(a)/y₁}*
12. $\neg F(f(a))$ *res(7, 11), {f(a)/x₄}*
13. $V(a) \vee F(f(a))$ *Res(1, 4), {a/x₁}*
14. $F(f(a))$ *Res(9, 13)*
15. \square *Res(12, 14)*

Albero di dimostrazione

$$\frac{\frac{\frac{(2) \quad (4)}{V(a) \vee P(a, f(a))} \quad \frac{(3) \quad (6)}{\neg V(a)}}{(5) \quad P(a, f(a))} \quad \frac{\frac{(3) \quad (6)}{\neg V(a)} \quad \frac{(1) \quad (4)}{V(a) \vee F(f(a))}}{F(f(a))}}{(7) \quad \frac{S(f(a))}{\neg F(f(a))}}{\square}$$

$$S = \{p(x) \vee p(y), \neg p(c) \vee \neg p(z)\}$$

è insoddisfacibile, ma ogni clausola derivabile mediante la regola di risoluzione, come è stata formulata fin qui, contiene due letterali. Quindi la clausola vuota non è derivabile.

Definizione. Se $C = C' \cup D$ e esiste un mgu θ per D , allora $C\theta$ è un **fattore** di C .

Esempio: $p(f(y)) \vee r(f(y), y)$ è un fattore di $p(x) \vee p(f(y)) \vee r(x, y)$.

Una clausola è sempre un fattore (banale) di se stessa.

Definizione: Un **risolvente** di C_1 e C_2 è un risolvente binario di un fattore di C_1 e di un fattore di C_2 .

Regola di risoluzione

Se

$C'_1 \cup \{P\}$ è un fattore di C_1
 $C'_2 \cup \{\neg Q\}$ è un fattore di C_2
 θ è un *mgu*(P, Q)

allora:

$$\frac{C_1 \quad C_2}{C'_1\theta \cup C'_2\theta}$$

Esempio:

$$\frac{p(x) \vee p(y) \quad \neg p(c) \vee \neg p(z)}{\quad}$$

□

$p(x)$ è un fattore di $p(x) \vee p(y)$
 $\neg p(c)$ è un fattore di $\neg p(c) \vee \neg p(z)$

Risolvere gli esercizi seguenti, utilizzando, dove appropriato, il metodo di risoluzione:

- 4, 6, 7, 10 pag. 23-26 delle Dispense (usare la risoluzione per le formule valide o i ragionamenti corretti)
- L, N, O pag. 67-68 (usare la risoluzione per i ragionamenti corretti).
- 8 pag. 105